

Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 16.07.2020, 10:00

Aufgabe 21: Es sei V ein K -Vektorraum und $r \geq 1$. Zeige, für den Unterraum V_r aus Definition 21.6 gilt:

$$V_r = \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_r \mid x_i \in V \forall i = 1, \dots, r; \exists 1 \leq i \leq r-1 : x_i = x_{i+1} \rangle.$$

Aufgabe 22: Es sei $E = (e_1, \dots, e_4)$ die Standardbasis des \mathbb{R}^4 und es sei

$$x = e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 + e_3 \wedge e_4 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4.$$

(a) Zeige, daß x zerlegbar (d.h. ein reines Produkt) ist.

(b) Zeige, die folgende Abbildung ist linear:

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \bigwedge^3 \mathbb{R}^4 : y \mapsto y \wedge x.$$

(c) Bestimme die Matrixdarstellung $M_B^E(f)$ von f bezüglich der Basen E von \mathbb{R}^4 und $B = (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$ von $\bigwedge^3 \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 23: Es sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum.

(a) Zeige, für $f, g \in V^*$ ist die Abbildung

$$\alpha_{f,g} : V^2 \longrightarrow K : (x, y) \mapsto \det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix}$$

bilinear und alternierend.

(b) Zeige, daß es genau eine lineare Abbildung

$$\alpha : V^* \wedge V^* \longrightarrow \text{Alt}(V^2, K)$$

mit

$$\alpha(f \wedge g) = \alpha_{f,g}$$

für $f, g \in V^*$ gibt.

(c) Zeige, daß die Abbildung α in Teil b. ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 24: Es sei V ein K -Vektorraum mit $\dim_K(V) = n < \infty$ und $f \in \text{End}_K(V)$. Zeige:

$$\det(f) = \text{Spur} \left(\bigwedge^n f \right).$$