Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2020
Blatt 1

Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 23.04.2020, 10:00

Aufgabe 1: Es sei M eine Menge.

(a) Zeige, sind $X, Y, Z \subseteq M$, dann gelten

$$X \setminus \big((Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)\big) = \big(X \setminus (Y \cup Z)\big) \cup (X \cap Y \cap Z)$$

und

$$\big((X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)\big) \setminus Z = \big(X \setminus (Y \cup Z)\big) \cup \big(Y \setminus (X \cup Z)\big).$$

(b) Wir definieren auf der Potenzmenge $G = \mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ von M eine zweistellige Operation durch

$$A + B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

für $A, B \in G$. Zeige, $(G, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 2: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $a \in G$ sei fest gegeben. Wir definieren eine zweistellige Operation auf G durch

$$* : G \times G \longrightarrow G : (g, h) \mapsto g * h = g \cdot \big(a^{-1} \cdot h\big).$$

Überprüfe, ob $(G, *)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 3: Es sei $(G, \cdot)$ ein Gruppe mit neutralem Element e.

(a) Ist $\{g^n \mid n > 0\}$ endlich, so gibt es ein $n > 0$ mit $g^n = e_G$.

(b) Zeige, falls $g^2 = e$ für alle $g \in G$, so ist G abelsch.

Aufgabe 4: Überprüfe, ob die Menge

$$U = \{f \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}) \mid f(x) < f(y) \text{ falls } x > y\}$$

eine Untergruppe von $\big(\mathrm{Sym}(\mathbb{R}), \circ\big)$ ist.