Fachbereich Mathematik | Sommersemester 2020
Thomas Markwig | Blatt 2

Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 07.05.2020, 10:00

Aufgabe 5: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq U \subseteq G$ eine endliche Teilmenge von G. Zeige, gilt $u \cdot v \in U$ für alle $u, v \in U$, dann ist U eine Untergruppe von G.

Aufgabe 6: Wir wissen bereits, daß $\mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition eine Gruppe ist. Welche der folgenden Abbildungen ist ein Gruppenhomomorphismus / -monomorphismus / -epimorphismus / -isomorphismus?

(a) $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x - 3y, 2x)$.

(b) $\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x + x \cdot y, 2x)$.

Welche der Aussagen bleiben richtig, wenn wir $\mathbb{R}^2$ durch $\mathbb{Z}^2$ ersetzen?

Aufgabe 7: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige, $\mathrm{inv} : G \longrightarrow G : g \mapsto g^{-1}$ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 8: Wir definieren für $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$v \sim w \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,:\, v = \lambda \cdot w$$

wobei $\lambda \cdot w := (\lambda \cdot w_1, \lambda \cdot w_2)$.

(a) Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist. Es ist üblich die Äquivalenzklasse $\overline{(v_1, v_2)}$ von (v_1, v_2) mit $(v_1 : v_2)$ zu bezeichnen, und man nennt die Menge $M/\sim$ der Äquivalenzklassen die *projektive Gerade* über $\mathbb{R}$ und bezeichnet sie mit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.

(b) Wir definieren auf $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ eine zweistellige Operation durch

$$(v_1 : v_2) \cdot (w_1 : w_2) := (v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_2 : v_1 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_1).$$

Zeige, daß diese Operation wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Repräsentanten für die Äquivalenzklasse abhängt, und daß $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ mit dieser Operation eine Gruppe ist.