Fachbereich Mathematik | Sommersemester 2020
Thomas Markwig | Blatt 3

Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 21.05.2020, 10:00

Aufgabe 9: Betrachte die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_7.$$

(a) Berechne $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, σ^{-1}, π^{-1}.

(b) Bestimme für jede der Permutationen in a. die Zyklenzerlegung.

(c) Schreibe $\sigma \circ \pi$ als ein Produkt von Transpositionen.

(d) Schreibe π^{-1} als ein Produkt von Transpositionen aufeinander folgender Zahlen.

(e) Berechne für jede der Permutationen in a. das Signum.

Aufgabe 10:

(a) Zeige, ist $\sigma = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_k) \in \mathbb{S}_n$ ein k-Zykel und $\pi \in \mathbb{S}_n$ eine Permutation, dann gilt
$$\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} = \big(\pi(a_1)\ \pi(a_2)\ \ldots\ \pi(a_k)\big)$$
und ist somit insbesondere ein k-Zykel.

(b) Zeige, der Zykeltyp einer Permutation bleibt unter Konjugation erhalten, d.h. sind $\sigma, \pi \in \mathbb{S}_n$, dann haben σ und $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ denselben Zykeltyp.

Aufgabe 11: [Diëdergruppe $\mathbb{D}_8$]
Wir wollen die Untergruppe
$$\mathbb{D}_8 = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4) \rangle$$
der symmetrischen Gruppe $\mathbb{S}_4$ betrachten.

(a) Berechne alle Elemente der $\mathbb{D}_8$.

(b) Bestimme alle Untergruppen und das Untergruppendiagramm der $\mathbb{D}_8$.

Aufgabe 12: Zeige, ist G eine Gruppe von Primzahlordnung, so ist G zyklisch, d.h. es gibt ein $g \in G$, so daß $G = \langle g \rangle$.