Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Mittwoch, 10.06.2020, 10:00

Aufgabe 13: Sei $\alpha : (G, \cdot) \longrightarrow (H, *)$ ein Gruppenhomomorphismus und $g \in G$.

(a) Zeige, ist $o(g) < \infty$, so ist $o(g)$ ein Vielfaches von $o\big(\alpha(g)\big)$.

(b) Zeige, α ist genau dann injektiv, wenn $o(g) = o\big(\alpha(g)\big)$ für alle $g \in G$ gilt.

(c) Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\alpha : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_6$.

Aufgabe 14:

(a) Finde zwei Untergruppen von $\mathbb{S}_4$, die beide die Mächtigkeit 4 besitzen, aber nicht isomorph zueinander sind. Begründe, weshalb es Untergruppen sind und weshalb sie nicht isomorph zueinander sind.

(b) Bestimme alle Normalteiler in $\mathbb{D}_8$.

Aufgabe 15: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $U \leq G$ eine endliche Untergruppe von G.

(a) Zeige, daß

$$N_G(U) := \{g \in G \mid g \cdot u \cdot g^{-1} \in U \text{ für alle } u \in U\}$$

die größte Untergruppe von G ist, in der U ein Normalteiler ist.

(b) Zeige, ist U die einzige Untergruppe von G der Ordnung $|U| = n < \infty$, dann ist U ein Normalteiler von G.

Aufgabe 16:

(a) Zeige, ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G. Beweise den ersten Isomorphiesatz

$$U \cdot N/N \cong U/U \cap N.$$

(b) Bestimme alle Untergruppen von $\mathbb{Z}_{33}$.