Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 25.06.2020, 10:00

Aufgabe 17:

(a) Zeige, $\mathbb{Z}[i] := \{a + i \cdot b \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, wobei die Addition und die Multiplikation einfach die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen sein sollen.

(b) Bestimme die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[i]^*$ des Ringes $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 18:

(a) Bestimme die Einheitengruppen $\mathbb{Z}_6^*$, $\mathbb{Z}_8^*$ und $\mathbb{Z}_{15}^*$ und stelle eine Vermutung auf, wann $\overline{z} \in \mathbb{Z}_n$ für $n \geq 2$ eine Einheit ist.

(b) Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k \in R[[t]]$ eine formale Potenzreihe über R. Zeige, f ist genau dann eine Einheit in $R[[t]]$, wenn a_0 eine Einheit in R ist.

Hinweis, wenn a_0 eine Einheit in R ist, so ist eine Reihe $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot t^k$ mit $f \cdot g = t^0$ gesucht. Multipliziere die linke Seite der Gleichung aus und löse die Gleichungen, die sich für die Koeffizienten ergeben rekursiv.

Aufgabe 19:

(a) Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeige, R ist genau dann ein Körper, wenn R genau zwei Ideale besitzt.

(b) Zeige, daß $\mathbb{Z}_5$ ein Körper ist.

(c) Ist $\mathbb{Z}_6$ auch ein Körper?

Aufgabe 20: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $I, J \trianglelefteq R$ seien Ideale, so daß es ein $x \in I$ und ein $y \in J$ gibt mit $x + y = 1$.
Zeige, die beiden Ringe $R/(I \cap J)$ und $(R/I) \times (R/J)$ sind isomorph.

Hinweis: $R/I \times R/J$ wird mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation als Ring betrachtet. Man verwende nun die Abbildung $\varphi : R \longrightarrow R/I \times R/J : a \mapsto (\overline{a}, \overline{a}) = (a + I, a + J)$.