

## Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 09.07.2020, 10:00

**Aufgabe 21:** Zeige, eine natürliche Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

**Aufgabe 22:**

(a) Zeige,  $\mathbb{Z}[i]$  ist ein euklidischer Ring mit der euklidischen Funktion

$$v : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N} : z = a + i \cdot b \mapsto |z|^2 = a^2 + b^2.$$

(b) Zeige, wenn  $v(z)$  eine Primzahl ist, dann ist  $z$  in  $\mathbb{Z}[i]$  ein Primelement. Finde zudem ein Beispiel für ein solches  $z$ .

**Aufgabe 23:** Bestimme mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' einen normierten größten gemeinsamen Teil der beiden Polynome

$$f = t^6 - t^5 - t^4 + t^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[t]$$

und

$$g = t^4 + t^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[t].$$

**Aufgabe 24:** Beweise die folgende Verallgemeinerung des Satzes zur Division mit Rest: Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und seien  $f, g \in R[t] \setminus \{0\}$ . Dann gibt es Polynome  $q, r \in R[t]$  und eine natürliche Zahl  $k \in \{0, \dots, \deg(g) + 1\}$ , so daß

$$\text{lc}(f)^k \cdot g = q \cdot f + r$$

mit

$$\deg(r) < \deg(f).$$