

Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 10.12.2020, 10:00

Aufgabe 9:

(a) Die bilineare Abbildung

$$\psi : K[t]_{\leq d} \times K[t]_{\leq d} \longrightarrow K[t]_{\leq 2d} : (f, g) \mapsto f \cdot g$$

induziert eine lineare Abbildung

$$f_\psi : K[t]_{\leq d} \otimes K[t]_{\leq d} \longrightarrow K[t]_{\leq 2d}.$$

Bestimme die Dimension des Kerns von f_ψ .

(b) Berechne im Fall $d = 2$ eine Basis von $\text{Ker}(f_\psi)$ in Teil b.

Aufgabe 10: Seien U, V und W K -Vektorräume. Zeige, es gibt genau eine K -lineare Abbildung

$$\psi : (U \oplus V) \otimes W \longrightarrow (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$$

mit

$$\psi((x, y) \otimes z) = (x \otimes z, y \otimes z)$$

für alle $x \in U, y \in V$ und $z \in W$, und ψ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 11:

(a) Bestimme den Rang des Tensors

$$(1, 1, 0)^t \otimes (1, 2, 1)^t + (2, 2, 2)^t \otimes (0, 2, 1)^t + (0, 0, 2)^t \otimes (2, 1, 1)^t \in \mathbb{F}_3^3 \otimes \mathbb{F}_3^3.$$

(b) Interpretiere den Vektorraum $\text{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R})$ als Tensorprodukt $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^3$ und schreibe den Tensor

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

als minimale Summe reiner Tensoren.

Aufgabe 12: Es sei V ein K -Vektorraum und $x, y \in V$.

Zeige, genau dann gilt $x \otimes y = y \otimes x$, wenn x und y linear abhängig sind.