Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2020
Blatt 7

Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 18.02.2021, 10:00

Aufgabe 27 und 28 sind Präsenzaufgaben. Sie brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Sie werden in der Übung in Kleingruppen bearbeitet.

Aufgabe 25: Zeige, für einen R-Modul M sind die folgenden Aussagen äquivalnt:

(a) M ist noethersch.

(b) Jede nicht-leere Menge von Untermoduln von M enthält ein maximales Element.

(c) Jede aufsteigende Kette $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ von Untermoduln von M wird stationär, d.h. es gibt ein n, so daß $N_k = N_n$ für alle $k \geq n$.

Aufgabe 26:

(a) Berechne die Smith-Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 2 & 9 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 5, \mathbb{Z}).$$

Bestimme zudem Basen für den Kern und das Bild von f_A.

(b) Bestimme das Tupel der Elementarteiler für den folgeden $\mathbb{Z}$-Modul

$$M = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{81} \oplus \mathbb{Z}_{125} \oplus \mathbb{Z}_{101} \oplus \mathbb{Z}_{243}.$$

Hinweis: für diese Aufgabe werden die Vorlesungen von der kommenden Woche benötigt.

Aufgabe 27: Sei $A = (a_1 \ldots a_n) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit $\det(A) \neq 0$ und sei $M = \mathbb{Z}^n / \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathbb{Z}}$. Zeige, $|M| = |\det(A)|$.

Aufgabe 28: Sei R ein Hauptidealring, M ein freier R-Modul vom Rang n und $N \leq M$ ein Untermodul von M.
Dann gibt es eine Basis $B = (x_1, \ldots, x_n)$ von M und $d_1, \ldots, d_k \in R$ mit $k \leq n$, so daß

$$D = (d_1 \cdot x_1, \ldots, d_k \cdot x_k)$$

eine Basis von N ist und

$$d_i \mid d_{i+1}$$

für $i = 1, \ldots, k$. Das Tupel $(d_1, \ldots, d_k)$ ist dabei bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.