

Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Die Aufgaben sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Sie werden in der ersten Übungsstunde bearbeitet und besprochen.

Aufgabe 1: Es sei M eine Menge.

(a) Zeige, sind $X, Y, Z \subseteq M$, dann gelten

$$X \setminus ((Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)) = (X \setminus (Y \cup Z)) \cup (X \cap Y \cap Z)$$

und

$$((X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)) \setminus Z = (X \setminus (Y \cup Z)) \cup (Y \setminus (X \cup Z)).$$

(b) Wir definieren auf der Potenzmenge $G = \mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ von M eine zweistellige Operation durch

$$A + B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

für $A, B \in G$. Zeige, $(G, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 2:

(a) Untersuche, ob $G = \{2 + 3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ mit der Multiplikation ganzer Zahlen als Verknüpfung eine Gruppe ist.

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ wird \mathbb{R} mit der folgenden zweistelligen Operation eine Gruppe:

$$x * y = ax + ay + b \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3: Es sei (G, \cdot) ein Gruppe mit neutralem Element e . Zeige, falls $g^2 = e$ für alle $g \in G$, so ist G abelsch.

Aufgabe 4: Überprüfe, ob die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}$$

eine Untergruppe von $(\text{Gl}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ ist.