Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2020
Thomas Markwig | Blatt 2

Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 19.11.2020, 10:00

Aufgabe 5: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $A \subseteq G$ eine Teilmenge von G. Zeige, daß die Menge

$$V = \{g \in G \mid g \cdot u \cdot g^{-1} = u \ \ \forall\, u \in A\}$$

eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 6: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $h, k \in G$ fest gegeben. Prüfe, welche Bedingungen für h und k gelten müssen, damit die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind:

(a) $\alpha : G \to G : g \mapsto h \cdot g \cdot h$,

(b) $\beta : G \to G : g \mapsto h^{-1} \cdot g \cdot k$,

Aufgabe 7: Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\alpha : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$.

Aufgabe 8: Wir definieren für $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$v \sim w \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,:\, v = \lambda \cdot w$$

wobei $\lambda \cdot w := (\lambda \cdot w_1, \lambda \cdot w_2)$.

(a) Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist. Es ist üblich die Äquivalenzklasse $\overline{(v_1, v_2)}$ von (v_1, v_2) mit $(v_1 : v_2)$ zu bezeichnen, und man nennt die Menge $M/\sim$ der Äquivalenzklassen die *projektive Gerade* über $\mathbb{R}$ und bezeichnet sie mit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.

(b) Wir definieren auf $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ eine zweistellige Operation durch

$$(v_1 : v_2) \cdot (w_1 : w_2) := (v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_2 : v_1 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_1).$$

Zeige, daß diese Operation wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Repräsentanten für die Äquivalenzklasse abhängt, und daß $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ mit dieser Operation eine Gruppe ist.