Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2020
Blatt 4

Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 17.12.2020, 10:00

Aufgabe 13: Es sei G eine endliche Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe vom Index $|G : U| = 2$. Zeige, U ist ein Normalteiler von G.

Aufgabe 14:

(a) Bestimme alle Normalteiler von $\mathbb{Z}_{34}$.

(b) Bestimme alle Normalteiler der Gruppe $\mathbb{D}_{10} = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 4) \circ (2\ 3) \rangle$.

Aufgabe 15: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige:

(a) Sind $g, h \in G$ mit $o(g) = o(h) = p$, wobei p eine Primzahl ist, dann gilt $\langle g \rangle = \langle h \rangle$ oder $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$.

(b) Falls $|G| = 10$, so gibt es zwei Elemente $g, h \in G$ mit:

- $o(g) = 2$,
- $o(h) = 5$,
- $\langle h \rangle \trianglelefteq G$,
- $\langle g \rangle \cdot \langle h \rangle = G$.

Hinweis, führe in Teil b. zunächst die folgenden beiden folgenden Möglichkeiten zum Widerspruch: 1. $o(k) = 2$ für alle $e \neq k \in G$, 2. $o(k) = 5$ für alle $e \neq k \in G$.

Anmerkung, in Teil b. nennt man G das semidirekte Produkt von $\langle g \rangle$ und $\langle h \rangle$. Man kann zeigen, falls $g \cdot h = h \cdot g$, so ist G isomorph zu $\mathbb{Z}_{10}$, andernfalls ist G isomorph zu $\mathbb{D}_{10}$. Das braucht hier aber nicht gemacht zu werden.

Aufgabe 16:

(a) Zeige, ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G. Beweise den ersten Isomorphiesatz

$$U \cdot N/N \cong U/U \cap N.$$

(b) Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\alpha : \mathbb{Z}_{35} \longrightarrow \mathbb{S}_3$.