

Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 04.02.2021, 10:00

Aufgaben 27 und 28 sind Präsenzaufgaben. Sie brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Sie werden in der Übung in Kleingruppen bearbeitet.

Aufgabe 25: Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) R ist ein Körper.
- (b) $R[t]$ ist ein euklidischer Ring.
- (c) $R[t]$ ist ein Hauptidealring.

Aufgabe 26: Bestimme mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes *alle* Lösungen des Kongruenzgleichungssystems:

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{4} \\x &\equiv 3 \pmod{7} \\x &\equiv -7 \pmod{15}\end{aligned}$$

Aufgabe 27: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der nicht der Nullring ist. Ein Ideal $P \subsetneq R$ heißt *Primideal*, wenn aus $a \cdot b \in P$ stets $a \in P$ oder $b \in P$ folgt.

Zeige, in R gibt es ein minimales Primideal P , d.h. ein Ideal P so, dass es kein Primideal Q mit $Q \subsetneq P$ gibt.

Aufgabe 28: Sei R ein kommutativer Ring und $J(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \triangleleft R} \mathfrak{m}$ der Durchschnitt aller maximalen Ideale. Zeige, $a \in J(R)$ genau dann, wenn $1 - a \cdot b \in R^*$ für alle $b \in R$.