

Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 06.11.2025, 10:00

Aufgabe 3: Wir bezeichnen mit e_i den i -ten Einheitsvektor im K^m , $i = 1, \dots, m$ und mit f_j den j -ten Einheitsvektor im K^n , $j = 1, \dots, n$. Ferner bezeichne $E_i^j \in \text{Mat}(m \times n, K)$ die Matrix mit einer Eins an Position (i, j) als einzigem Nicht-Null-Eintrag.

(a) Zeige, daß es genau eine bilineare Abbildung

$$b : K^m \times K^n \longrightarrow \text{Mat}(m \times n, K)$$

gibt mit

$$b(e_i, f_j) = E_i^j$$

für alle $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

(b) Sei W ein K -Vektorraum und sei

$$c : K^m \times K^n \longrightarrow W$$

eine bilineare Abbildung. Zeige, dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$f : \text{Mat}(m \times n, K) \longrightarrow W,$$

so daß $f \circ b = c$ gilt.

Aufgabe 4: Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und seien $g_1, \dots, g_n \in V^*$. Zeige, genau dann ist die Familie $(g_1, \dots, g_n)$ linear unabhängig in V^* , wenn es keinen Vektor $0 \neq x \in V$ gibt, so daß $g_i(x) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Präsenzaufgabe 3:

(a) Bestimme für die folgende symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}_5(\mathbb{R})$ mit Hilfe des symmetrischen Gaußalgorithmus' eine Transformationsmatrix $T \in \text{GL}_5(\mathbb{R})$, so daß $T^t \circ A \circ T$ eine Diagonalmatrix wie im Sylvesterschen Trägheitssatz ist, und bestimme den Trägheitsindex, den Morseindex, die Signatur und den Rang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

- (b) Zeige, daß die folgende Familie eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist und bestimme die duale Basis B^* als Vektoren in $\text{Mat}(1 \times 4, \mathbb{R})$:

$$B = ((2, 2, 2, 1)^t, (0, 1, 0, 0)^t, (1, 2, 3, 0)^t, (1, 0, 0, 1)^t)$$

Präsenzaufgabe 4: Es sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ seien zwei Unterräume von V . Zeige:

(a) $(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$.

(b) $(U_1 \cap U_2)^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ$.