

## Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 15.01.2026, 10:00

**Aufgabe 11:** Berechne die Determinante der folgenden Matrix mittels Entwicklung nach den ersten beiden Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_5(\mathbb{F}_3).$$

**Aufgabe 12:** Es sei  $f : V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

- (a) Wenn  $f$  surjektiv ist, dann ist  $\bigwedge^r f$  surjektiv.
- (b) Wenn  $f$  injektiv und  $B = (x_1, \dots, x_n)$  eine Basis von  $V$  ist, dann ist die Familie  $(f(x_{i_1}) \wedge \dots \wedge f(x_{i_r}) \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$  eine Basis von  $\text{Im}(\bigwedge^r f)$ .
- (c) Wenn  $f$  injektiv und  $\dim_K(V) < \infty$  ist, dann ist  $\bigwedge^r f$  injektiv.
- (d) Wenn  $f$  injektiv ist, dann ist  $\bigwedge^r f$  injektiv.

**Präsenzaufgabe 11:** Zeige, daß die Abbildung  $\alpha$  in Aufgabe 10 ein Isomorphismus ist.

Hinweis: man betrachte eine Basis von  $V$  sowie die duale Basis von  $V^*$  und die sich daraus ergebende Basis von  $V^* \wedge V^*$ . Für ein  $\psi \in \text{Alt}_K(V^2, K)$  kann man dann ein Urbild unter  $\alpha$  als Linearkombination der Basisvektoren konstruieren.

**Präsenzaufgabe 12:** Wir betrachten für die Algebra

$$\bigwedge \mathbb{R}^2 = \bigwedge^0 \mathbb{R}^2 \oplus \bigwedge^1 \mathbb{R}^2 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$$

die Basis  $B = (1, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$  sowie den Vektorraumisomorphismus

$$M_B : \bigwedge \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4,$$

der durch die Matrixdarstellung bezüglich  $B$  gegeben ist. Ferner bezeichne  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^4$ .

- (a) Stelle die Multiplikationstafel für die Basis  $B$  auf.
- (b) Wir können  $M_B$  zu einem Algebrenisomorphismus machen, indem wir auf  $\mathbb{R}^4$  eine Multiplikation durch

$$x \cdot y := M_B(M_B^{-1}(x) \cdot M_B^{-1}(y))$$

definieren. Berechne das Produkt  $x \cdot y$  für  $x, y \in \mathbb{R}^4$  explizit.