

Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 30.10.2025, 10:00

Die Präsenzaufgaben brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden; sie werden in den Übungsstunden bearbeitet und besprochen.

Aufgabe 1: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq U \subseteq G$ eine endliche Teilmenge von G . Zeige, gilt $u \cdot v \in U$ für alle $u, v \in U$, dann ist U eine Untergruppe von G .

Aufgabe 2: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(a) Zeige, die Menge

$$\text{Inn}(G) = \{i_g : G \longrightarrow G : h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1} \mid g \in G\}$$

der *inneren Automorphismen* von G ist eine Untergruppe von $(\text{Sym}(G), \circ)$.

(b) Zeige, genau dann ist

$$\alpha : G \longrightarrow G : g \mapsto g^2$$

ein Gruppenhomomorphismus, wenn $(G, \cdot)$ abelsch ist.

Präsenzaufgabe 5: Wir betrachten die folgenden Matrizen

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$$

in der Gruppe $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ der invertierbaren 2×2 -Matrizen über $\mathbb{C}$, sowie die Menge

$$U = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2, I, -I, J, -J, K, -K\}.$$

(a) Stelle eine Gruppentafel für U auf und leite daraus ab, dass U eine Untergruppe von $(\text{GL}_2(\mathbb{C}), \circ)$ ist.

(b) Bestimme alle Untergruppen von U . Ist U zyklisch? Ist U abelsch?

Hinweis: in Teil (b) berechne man für jedes Element aus U die Ordnung; das hilft beim Bestimmen der Untergruppen.

Präsenzaufgabe 6: Wir definieren für $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : v = \lambda \cdot w$$

wobei $\lambda \cdot w := (\lambda \cdot w_1, \lambda \cdot w_2)$.

(a) Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist. Es ist üblich die Äquivalenzklasse $\overline{(v_1, v_2)}$ von (v_1, v_2) mit $(v_1 : v_2)$ zu bezeichnen, und man nennt die Menge $M / \sim$ der Äquivalenzklassen die *projektive Gerade* über $\mathbb{R}$ und bezeichnet sie mit $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

(b) Wir definieren auf $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ eine zweistellige Operation durch

$$(v_1 : v_2) \cdot (w_1 : w_2) := (v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_2 : v_1 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_1).$$

Zeige, daß diese Operation wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Repräsentanten für die Äquivalenzklasse abhängt, und daß $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ mit dieser Operation eine Gruppe ist.