

Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 13.11.2025, 10:00

Aufgabe 3:

- (a) Zeige, ist $\sigma = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k) \in S_n$ ein k -Zykel und $\pi \in S_n$ eine Permutation, dann gilt

$$\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} = (\pi(a_1) \ \pi(a_2) \ \dots \ \pi(a_k))$$

und ist somit insbesondere ein k -Zykel.

- (b) Zeige, der Zykeltyp einer Permutation bleibt unter Konjugation erhalten, d.h. sind $\sigma, \pi \in S_n$, dann haben σ und $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ denselben Zykeltyp.

Aufgabe 4: [Diödergruppe D_8]

Wir wollen die Untergruppe

$$D_8 = \langle (1 \ 2 \ 3 \ 4), (2 \ 4) \rangle$$

der symmetrischen Gruppe S_4 betrachten.

- (a) Berechne alle Elemente der D_8 .
- (b) Bestimme alle Untergruppen und das Untergruppendiagramm der D_8 .

Präsenzaufgabe 7: Betrachte die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in S_8.$$

- (a) Berechne $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, σ^{-1} , π^{-1} .
- (b) Bestimme für jede der Permutationen in a. die Zyklenzerlegung.
- (c) Schreibe $\sigma \circ \pi$ als ein Produkt von Transpositionen.
- (d) Schreibe σ als ein Produkt von Transpositionen aufeinander folgender Zahlen.
- (e) Berechne für jede der Permutationen in a. das Signum.

Präsenzaufgabe 8: Zeige, ist G eine Gruppe von Primzahlordnung, so ist G zyklisch, d.h. es gibt ein $g \in G$, so daß $G = \langle g \rangle$.