Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 27.11.2025, 10:00

Aufgabe 5:

(a) Seien G und H zwei Gruppen und $g \in G$ mit $o(g) = m$ und $h \in H$ mit $o(h) = n$. Zeige, für die Ordnung von $(g, h) \in G \times H$ gilt

$$o((g, h)) = \mathbf{kgv}(m, n).$$

(b) Berechne die Ordnung von $(\overline{330}, \overline{425}) \in \mathbb{Z}_{924} \times \mathbb{Z}_{510}$.

Hinweis: hier wird das kartesische Produkt von zwei Gruppen mit komponentenweisen Operationen als Gruppe betrachtet.

Aufgabe 6:

(a) Zeige, ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G. Beweise den ersten Isomorphiesatz

$$U \cdot N/N \cong U/U \cap N.$$

(b) Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\alpha : \mathbb{Z}_{77} \longrightarrow \mathbb{S}_6$.

(c) Berechne die Ordnung Untergruppe $U = \langle (1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4) \rangle$ von $\mathbb{S}_4$.

Hinweis: in Teil (c) braucht man die Gruppe selbst nicht zu berechnen!

Präsenzaufgabe 9:

(a) Bestimme für die Gruppen aus Präsenzaufgabe 5 und Aufgabe 4 alle Normalteiler.

(b) Es sei G eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe vom Index $|G : U| = 2$. Zeige, U ist ein Normalteiler von G.

(c) Gibt es ganze Zahlen $k \neq l$ mit $g^k = g^l$, so existiert die Zahl

$$n = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m > 0, g^m = e_G\}$$

und es gelten:

(1) $\{m \in \mathbb{Z} \mid g^m = e\} = n\mathbb{Z}$,
(2) $\langle g \rangle = \{e_G, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$, und
(3) $|\langle g \rangle| = n$.

Präsenzaufgabe 10: Zeige, dass die Menge

$$\mathbb{Z}[i] := \{x + y \cdot i \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.