Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 08.01.2026, 10:00

Aufgabe 9:

(a) Zeige, $\mathbb{Z}[i]$ ist ein euklidischer Ring mit der euklidischen Funktion

$$\nu : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N} : z = a + i \cdot b \mapsto |z|^2 = a^2 + b^2.$$

(b) Ist $3 + 4i$ ein Teiler von $7 + i$ in $\mathbb{Z}[i]$?

(c) Zeige, ist $p = x + y \cdot i \in \mathbb{Z}[i]$ so, dass $|p|^2 = x^2 + y^2$ eine Primzahl in $\mathbb{Z}$ ist, dann ist p irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$.

(d) Finde ein Beispiel für eine Zahl p wie in Teil (c).

Aufgabe 10: Bestimme mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' einen normierten größten gemeinsamen Teil der beiden Polynome

$$f = t^5 + \overline{2} \cdot t^4 + \overline{3} \cdot t + \overline{3} \in \mathbb{Z}_5[t]$$

und

$$g = t^4 + \overline{2} \cdot t^3 + \overline{2} \cdot t^2 + \overline{3} \cdot t + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[t].$$

Präsenzaufgabe 12:

(a) Gib ein Beispiel für einen kommutativen Ring mit Eins R und eine Einheit $f \in R[t]^*$ mit $\deg(f) > 0$.

(b) Finde alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_6$.

(c) Finde alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Präsenzaufgabe 13: Sei R ein Integritätsbereich, $a, b \in R$.

(a) Ist $g \in \operatorname{ggT}(a, b)$, dann ist $\operatorname{ggT}(a, b) = \{u \cdot g \mid u \in R^*\}$, d.h. ein größter gemeinsamer Teiler ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

(b) Ist $k \in \operatorname{kgV}(a, b)$, dann ist $\operatorname{kgV}(a, b) = \{u \cdot k \mid u \in R^*\}$, d.h. ein kleinstes gemeinsames Vielfaches ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.