

Abschlußklausur zu den Algebraischen Strukturen

Name

Matrikelnummer

Summe der Punkte

Klausurtermin: Samstag, 14. Februar 2025, 10:15-12:15 Uhr

Hinweise: Die Klausuraufgaben sind jeweils auf getrennten Blättern zu bearbeiten. *Nie zwei Aufgaben auf demselben Blatt lösen!!!*

Alle nicht offensichtlichen Beweis-/Rechenschritte sind zu begründen.

Die Zahlen in Klammern am rechten Seitenrand geben die Punktzahlen an, die durch Lösen der jeweiligen Aufgabe erreichbar sind. Insgesamt sind es 60 Punkte.

Jedes Blatt ist am oberen Rand der Vorderseite wie folgt zu beschriften:

eigener Name

Matrikelnummer

Aufgabennummer

Aufgabe 1: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Definiere, (4)
wann $p \in R$ prim heißt.

Aufgabe 2: Formuliere und beweise den Satz von Lagrange. (6)

Aufgabe 3: Betrachte die Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_8 \quad (4)$$

Berechne die Permutation $\pi \circ \sigma$ und für diese dann eine Zyklenzerlegung, eine Zerlegung in ein Produkt von Transpositionen sowie das Signum.

Aufgabe 4:

a. Bestimme alle Elemente von \mathbb{Z}_{20}^* und begründe Deine Antwort. (4)

b. Zeige, die Abbildung (4)

$$\alpha : (\mathbb{Z}_8, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot) : \bar{z} \mapsto \bar{3}^z$$

ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

c. Bestimme den Kern von α als Teilmenge von \mathbb{Z}_8 und das Bild von α als Teilmenge von \mathbb{Z}_{20}^* . (4)

Aufgabe 5: Löse das folgende Gleichungssystem in \mathbb{Z}_{12} :

$$\begin{aligned} \bar{3} \cdot x + \bar{7} \cdot y &= \bar{4}, \\ \bar{8} \cdot x + \bar{5} \cdot y &= \bar{1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Begründe dabei, weshalb die einzelnen Rechenschritte erlaubt sind!

Aufgabe 6: Es seien $f = 4t^4 + 8t^3 + 9t^2 + 2t + 2$ und $g = 2t^3 + 5t^2 + 6t + 2$ in $\mathbb{Q}[t]$ gegeben. Berechne einen Erzeuger des Hauptideals $I = \langle f, g \rangle_{\mathbb{Q}[t]}$. (4)

Aufgabe 7:

a. Zeige, ist K ein Körper, dann ist die folgende Menge eine Untergruppe von $(\text{Gl}_2 K, \circ)$: (4)

$$U = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & a \\ 0 & b \end{array} \right) \mid a, b \in K, b \neq 0 \right\}.$$

b. Hat U im Falle des Körpers $K = \mathbb{Z}_5$ eine Untergruppe der Ordnung 6? Gib eine solche Untergruppe an oder zeige, dass keine existieren kann. (6)

Aufgabe 8: Es seien $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ zwei teilerfremde Zahlen.

Zeige, hat eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ bei Division durch m und bei Division durch n jeweils den Rest r , so hat sie auch bei Division durch $m \cdot n$ den Rest r . (4)

Aufgabe 9: Zeige, ist $|x|^2$ ein Primzahl für $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, so ist x irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. (4)

Aufgabe 10: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, so dass für jedes $0 \neq x \in R$ ein eindeutig bestimmtes $y \in R$ existiert mit $xyx = x$.

a. Zeige, dass R ein Integritätsbereich ist. (4)

b. Zeige, dass R ein Körper ist. (4)