Prof. Dr. Gert–Martin Greuel Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 03/05/2004, 13:00 Uhr

Die Singular-Aufgabe ist erst am Freitag, den 07. Mai, um 10:00 Uhr einzureichen.

Aufgabe 1: Zeige, die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & -a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$$

ist genau dann invertierbar, wenn $(a_0, a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0, 0)$.

Hinweis: Betrachte $\det\left(A \cdot A^t\right)$.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper und $A, B, C, D \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ mit $AC = CA$ und $\det(A) \neq 0$. Zeige,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

Hinweis: Betrachte die Matrix $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ -C & A \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3: Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Definiere

$$A_{n,a} = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & a & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K).$$

Leite eine Rekursionsformel für $d_{n,a} = \det\left(A_{n,a}\right)$ her und zeige, $d_{2+3k,1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4: Schreibe eine SINGULAR–Prozedur `determinante`, die eine quadratische Matrix A einliest und ihre Determinante ausgibt. Die Prozedur soll zur Berechnung der Determinante den Laplaceschen Entwicklungssatz verwenden und die Determinante nach der ersten Zeile entwickeln.

Hinweis: Beim Bilden der Streichungsmatrizen kann der Befehl `concat` zum zusammenfügen von zwei Matrizen hilfreich sein.