FB Mathematik — SS 2004, Blatt 2

Prof. Dr. Gert–Martin Greuel — Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 10/05/2004, 13:00 Uhr

Aufgabe 5: Berechne den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $f = x^6 + 3x^5 + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ und $g = x^3 + 6x^2 + 10x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

Hinweis: Verwende Polynomdivision mit Rest und den Euklidischen Algorithmus wie bei den ganzen Zahlen.

Aufgabe 6: Gib ein Beispiel für einen (notwendig nicht-nullteilerfreien) Ring R und eine Einheit $f \in R[x]^*$, die keine Einheit in R^* ist.

Aufgabe 7: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, A eine R-Algebra und $a \in A$. Wir nennen A *frei in* a, falls für jede R-Algebra B und jedes $b \in B$ gilt, daß es *genau einen* R-Algebrenhomomorphismus $\varphi : A \to B$ gibt mit $\varphi(a) = b$. Zeige:

a. $R[x]$ ist frei in x.

b. Ist A frei in a, so gibt es genau einen *Isomorphismus* $\varphi : R[x] \to A$ mit $\varphi(x) = a$.

Aufgabe 8: **[$K[x]$ ist ein Hauptidealring.]**

Es sei K ein Körper und $I \subseteq K[x]$ ein Ideal. Zeige, es gibt ein $f \in K[x]$, so daß $I = \langle f \rangle$.

Hinweis: Betrachte in I Elemente ungleich Null von minimalem Grad.