FB Mathematik | SS 2004, Blatt 3

Prof. Dr. Gert–Martin Greuel | Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 17/05/2004, 13:00 Uhr

Die Singular-Aufgabe ist erst am Donnerstag, den 20. Mai, um 08:00 Uhr einzureichen.

Aufgabe 9: Es sei V ein K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und x_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i für $i = 1, \ldots, m$. Zeige, sind die λ_i paarweise verschieden, so sind $x_1, \ldots, x_m$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 10: Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum. Dann gilt:

$$\chi_f = \chi_{f_U} \cdot \chi_{f_{V/U}}.$$

Hinweis, für die Definitionen von f_U und $f_{V/U}$ siehe Aufgabe 47 und 51 in Linearer Algebra I.

Aufgabe 11: Es sei V ein K-Vektorraum, $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeige:

a. Ist $\dim_K(V) < \infty$, so haben $f \circ g$ und $g \circ f$ die gleichen Eigenwerte.

b. Ist $\dim_K(V) = \infty$, so gilt dies i. a. nicht mehr.

Hinweis: Ist λ ein Eigenwert von $f \circ g$, so unterscheide man die Fälle $\lambda \neq 0$ und $\lambda = 0$.

Aufgabe 12: Schreibe eine Prozedur `param`, die die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b), $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$, $b \in K^m$, eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ einliest und eine Liste mit folgenden zwei Einträgen zurück gibt: der erste Eintrag soll eine Matrix sein, deren Spalten eine Basis des Lösungsraums des homogenen LGS $Ax = 0$ bilden, der zweite Eintrag eine spezielle Lösung x_0 des LGS $Ax = b$. Ist das LGS nicht lösbar, so soll eine Fehlermeldung ausgegeben werden; ist das LGS eindeutig lösbar, so soll als "Basis" von $\text{Lös}(A, 0)$ der Nullvektor ausgegeben werden. Verwende den folgenden Algorithmus:

1. Schritt Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix (A, b).

2. Schritt Berechnen einer reduzierten Zeilen-Stufen-Form (A', b') von (A, b) sowie von $r = \mathrm{rang}(A')$.

3. Schritt
- Ist $b'_{r+1} \neq 0$, gib eine Meldung zurück, daß das LGS nicht lösbar ist.
- Ist $b'_{r+1} = 0$ und $r = n$, so gib $x^0 = (b'_1, \ldots, b'_n)$ als eindeutig bestimmte Lösung zurück und als Matrix B eine $n \times 1$-Nullmatrix.
- Ist $b'_{r+1} = 0$ und $r < n$, so bestimme zunächst die Pivotspalten $\{j_1, \ldots, j_r\}$ (am Besten speichert man diese in einem `intvec`).

  Initialisiere den Vektor x^0 als Nullvektor und addiere für $i = 1, \ldots, r$ zum j_i-ten Eintrag b'_i. Ferner definiere eine Matrix $B' \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ dadurch, daß für $j = 1, \ldots, n$ die j-te Zeile gerade der Einheitsvektor e_j ist, falls $j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$, und $-a'_i$ (minus die i-te Zeile von A') falls $j = j_i$ für ein $i = 1, \ldots, r$. Sodann streiche aus B' die Spalten $j_1, \ldots, j_r$, um die Matrix B zu erhalten. Gib (B, x^0) zurück.

Hinweise: Vektoren wie b oder x_0 sollten in Singular **NICHT** als Datentyp `vector` deklariert werden, sondern als Matrizen mit nur einer Spalte! Zwei Matrizen A und b kann man mit dem Befehl `concat` aus der Bibliothek `matrix.lib` zu einer Matrix (A, b) zusammenfügen.

Anmerkung: Der Algorithmus ist sehr komplex, es ist deshalb wichtig, daß Ihr die Prozedur ausführlich KOMMENTIERT und daß Ihr sie gut TESTET!