Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 24/05/2004, 13:00 Uhr

Aufgabe 13: Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 2 \\ -4 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar bzw. trigonalisierbar?

Anmerkung: Ihr dürft Singular verwenden, um die Rechnungen durchzuführen.

Aufgabe 14: Es sei $P_n := \{f \in K[x] \mid \deg(f) \leq n\}$ der K-Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n über dem Körper K. Wir wissen, daß $B := \left\{1, t, t^2, \ldots, t^n\right\}$ eine Basis des Vektorraums ist, und deshalb können wir eine lineare Abbildung $T : P_n \to P_n$ definieren indem wir die Bilder der Basisvektoren vorgeben als $T\left(t^i\right) := (t+1)^i$ und die Abbildung linear fortsetzen. Bestimme die Eigenwerte der linearen Abbildung T und überprüfe, ob T diagonalisierbar bzw. trigonalisierbar ist.

Aufgabe 15: Es sei $A \in \mathrm{Gl}_n(K)$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix über dem Körper K. Zeige,

$$\chi_{A^{-1}} = \frac{(-t)^n}{\det(A)} \cdot \chi_A\left(\frac{1}{t}\right) = (-1)^n \cdot \left(t^n + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot t^{n-1} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0} \cdot t + \frac{(-1)^n}{\alpha_0}\right),$$

wenn $\chi_A = (-1)^n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \ldots + \alpha_0$. Folgere daraus, daß im Falle $n = 2$

$$\mathrm{Spur}\left(A^{-1}\right) = \frac{\mathrm{Spur}(A)}{\det(A)}.$$

Aufgabe 16: Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ mit $A^2 = A$. Zeige:

a. $\mathrm{rang}(A) = \dim_K\left(\mathrm{Eig}(A, 1)\right)$,

b. $K^n = \mathrm{Eig}(A, 1) \oplus \mathrm{Eig}(A, 0)$, und

c. für $r := \mathrm{rang}(A)$ gibt es ein $T \in \mathrm{Gl}_n(K)$ mit $T \circ A \circ T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.