FB Mathematik — SS 2004, Blatt 5

Prof. Dr. Gert–Martin Greuel — Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 07/06/2004, 13:00 Uhr

Aufgabe 17: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $E = (x_1, x_2, x_3)$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit

$$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1 + 3x_2 + 6x_3, \\ f(x_2) &= -3x_1 - 5x_2 - 6x_3, \\ f(x_3) &= 3x_1 + 3x_2 + 4x_3. \end{aligned}$$

Bestimme das Minimalpolynom von f, zeige, daß f diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis B, bezüglich derer f Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 18: Ein Polynom $k \in K[t]$ heißt *kleinstes gemeinsames Vielfaches* von $g, h \in K[t]$ (kurz kgV(g,h)), falls k folgende Eigenschaft besitzt: $g \mid k$ und $h \mid k$, und für jedes Polynom k' mit der Eigenschaft $g \mid k'$ und $h \mid k'$ gilt $k \mid k'$.
Zeige, k ist genau dann ein kgV(g,h), wenn $kK[t] = gK[t] \cap hK[t]$ gilt.

Aufgabe 19: Es sei $V = U_1 \oplus U_2$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f(U_i) \subseteq U_i$. Zeige:

a. $\mathrm{Ker}(\phi_f) = \mathrm{Ker}\left(\phi_{f_{U_1}}\right) \cap \mathrm{Ker}\left(\phi_{f_{U_2}}\right)$.

b. μ_f ist ein kgV$\left(\mu_{f_{U_1}}, \mu_{f_{U_2}}\right)$.

Hinweis: Beachte, daß für $g \in K[t]$ gilt $g\left(M_B^B(f)\right) = M_B^B\left(g(f)\right)$. Wieso?

Aufgabe 20: Schreibe eine Prozedur `min_poly`, die eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ einliest und das Minimalpolynom von A zurückgibt. Man verwende folgenden Algorithmus:

INPUT: $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$

OUTPUT: μ_A

1. Schritt Falls A nicht quadratisch ist, gib 0 zurück.

2. Schritt Bilde die Potenzen $A^0, \ldots, A^n$ und schreibe die Matrizen in Form von Spaltenvektoren der Länge n^2 in eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}\left(n^2 \times (n+1), K\right)$.

3. Schritt Berechne eine Parametrisierung von Lös$(B, 0)$.

4. Schritt Verwende die Koeffizienten der ersten Spalte der Parametrisierung als Koeffizienten eines Polynoms und gib dieses zurück.

Hinweis: Mit `transpose(ideal(A));` erzeugt man in Singular eine $n^2 \times 1$-Matrix aus den Zeilen von A. Die Prozedur `param` aus Aufgabe 12 darf verwendet werden.