FB Mathematik — SS 2004, Blatt 6
Prof. Dr. Gert–Martin Greuel — Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 14/06/2004, 13:00 Uhr

Aufgabe 21: Es sei $f = f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Zeige, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Hau}(f,1) \oplus \mathrm{Hau}(f,-1)$.

b. Bestimme Basen der Haupträume $\mathrm{Hau}(f,1)$ und $\mathrm{Hau}(f,-1)$.

c. Bestimme Matrizen $A_1, A_{-1} \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{R})$, so daß f_{A_1} eine Projektion auf $\mathrm{Hau}(f,1)$ ist und $f_{A_{-1}}$ eine Projektion auf $\mathrm{Hau}(f,-1)$.

Anmerkung, wir nennen einen Endomorphismus $g : V \to V$ eine Projektion auf $U \subset V$, wenn $g^2 = g$ und $\mathrm{Im}(g) = U$. Um A_1 und A_{-1} (bzw. die Abbildungen f_{A_1} und $f_{A_{-1}}$) zu finden, sollte man sich die Abbildungen $Q_i(f)$ im Beweis von Proposition 3.16 anschauen (und berechnen)!

Aufgabe 22: Ist $A \in \mathrm{Gl}_n(K)$, so gibt es ein Polynom $g \in K[t]$ mit $A^{-1} = g(A)$.

Aufgabe 23: Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $0 \neq m \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Ker}\left(f^{m-1}\right) \subsetneqq \mathrm{Ker}\left(f^m\right) = \mathrm{Ker}\left(f^{m+1}\right)$. Zeige:

a. $V = \mathrm{Im}\left(f^0\right) \supsetneqq \mathrm{Im}\left(f^1\right) \supsetneqq \ldots \supsetneqq \mathrm{Im}\left(f^m\right)$,

b. $\mathrm{Im}\left(f^m\right) = \mathrm{Im}\left(f^k\right)$ für alle $k \geq m$, und

c. $V = \mathrm{Ker}\left(f^m\right) \oplus \mathrm{Im}\left(f^m\right)$. ("Fitting-Zerlegung von V")

Aufgabe 24:

a. Es sei $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\{0\} = U_0 \subseteq U_1 \subseteq \ldots \subseteq U_{m-1} \subseteq U_m = V$ eine aufsteigende Kette von f-invarianten Unterräumen. Ferner seien die Minimalpolynome $\mu_{f_{U_i/U_{i-1}}}$ für $i = 1, \ldots, m$ paarweise teilerfremd. Zeige, dann ist

$$\mu_f = \mu_{f_{U_m/U_{m-1}}} \cdot \ldots \cdot \mu_{f_{U_1/U_0}}.$$

b. Es seien $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ paarweise verschieden. Zeige, die folgende Matrix ist diagonalisierbar:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{1}_{m_1} & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 \mathbb{1}_{m_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_r \mathbb{1}_{m_r} \end{pmatrix}.$$