FB Mathematik — SS 2004, Blatt 7

Prof. Dr. Gert–Martin Greuel — Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 21/06/2004, 13:00 Uhr

Die Singular-Aufgabe ist erst am Donnerstag, den 24. Juni, um 08:00 Uhr einzureichen.

Aufgabe 25:

a. Bestimme die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(5, K)$ mit $\chi_A = t(t-1)^4$, $\mu_A = t(t-1)^2$ und $\mathrm{rang}(A - \mathbb{1}_5) = 2$. Bestimme die Jordansche Normalform von A.

Hinweis: Singular darf verwendet werden.

Aufgabe 26: Bestimme eine Basis B von $\mathbb{R}^5$, bezüglich derer die Matrixdarstellung der Abbildung $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^5\right)$ mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 + 3x_3, -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5, x_1 - x_3 + 2x_5)^t$ Jordansche Normalform hat.

Hinweis: Singular darf verwendet werden.

Aufgabe 27: Es sei $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\mu_f = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{m_i}$, wobei die $\lambda_i \in K$ paarweise verschieden sind. Sei ferner B eine Basis von V, so daß $M_B^B(f)$ Jordansche Normalform hat, und sei t_{ij} die Anzahl der Jordanblöcke der Größe $j \times j$ zum Eigenwert λ_i. Zeige, für $i = 1, \ldots, r$ und $1 \leq j \leq m_i$ gilt:

$$t_{ij} = \mathrm{rang}\left((f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)^{j-1}\right) - 2\,\mathrm{rang}\left((f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)^{j}\right) + \mathrm{rang}\left((f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)^{j+1}\right).$$

Hinweise: 1. Zeige, $J(0,j)^l = \left(\delta_{\mu+l,\nu}\right)_{\mu,\nu=1,\ldots,j}$ und $\mathrm{rang}\left(J(0,j)^l\right) = \max\{0, j-l\}$ für $l \in \mathbb{N}$. 2. Man betrachte zunächst den Fall $r = 1$ und $\lambda_1 = 0$. 3. Den allgemeinen Fall führe man auf die Abbildungen $g_i := (f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)_{\mathrm{Hau}(f,\lambda_i)}$ zurück.

Anmerkung: Die t_{ij} nennt man die *Elementarteiler* von f.

Aufgabe 28: Schreibe eine Singular-Prozedur `jordaninvariants`, die eine quadratische Matrix A einliest und, falls das Minimalpolynom $\mu_A = \prod_{i=1}^{r}(t-\lambda_i)^{m_i}$ über $\mathbb{Q}$ in Linearfaktoren zerfällt, eine Liste `nf` von r Listen ausgibt, so daß in der Liste `nf[i]` als Einträge gerade der Eigenwert λ_i (Typ `poly`) und der Vektor der Elementarteiler $t_{i,1},\ldots,t_{i,m_i}$ (Typ `intvec`) enthalten sind.

Man verwende folgenden Algorithmus:

INPUT: $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{Q})$, so daß μ_A in Linearfaktoren zerfällt.

OUTPUT: Liste mit den Eigenwerten von A und den Elementarteilern.

1. Schritt Bestimme das Minimalpolynom μ_A von A und faktorisiere es mittels `factorize`.

2. Schritt Wenn μ_A nicht in Linearfaktoren zerfällt, gib 0 zurück.

3. Schritt Für jeden Eigenwert λ_i mit $\mathrm{mult}(\mu_A,\lambda_i) = m_i$ bestimme man für $j = 0,\ldots,m_i+1$ die Zahlen $\mathrm{rang}\big((A-\lambda_i \mathbb{1}_n)^j\big)$ und berechne daraus den Vektor der Elementarteiler $(t_{i1},\ldots,t_{im_i})$. Den Eigenwert und den Vektor der Elementarteiler speichere man in der Liste `nf[i]`.

4. Schritt Man gebe die Liste `nf` zurück.

Hinweise: Ist p ein Polynom, dann liefert `jet(p,0)` den konstanten Anteil des Polynoms.