FB Mathematik — SS 2004, Blatt 8

Prof. Dr. Gert–Martin Greuel — Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 28/06/2004, 13:00 Uhr

Aufgabe 29: Es sei $b : K^2 \times K^2 \to K : \big((x_1,x_2)^t,(y_1,y_2)^t\big) \mapsto 2\cdot x_1\cdot y_1 + x_1\cdot y_2 + y_1\cdot x_2 - x_2\cdot y_2$. Ferner bezeichne $E = (e_1,e_2)$ die kanonische Basis des K^2 und $B = (x_1,x_2)$ mit $x_1 = (1,1)^t$ und $x_2 = (1,-1)^t$ sei eine weitere Basis.

a. Zeige, b ist eine symmetrische Bilinearform.

b. Berechne die Matrixdarstellungen $M_E(b)$ und $M_B(b)$.

c. Berechne die Transformationsmatrix T_E^B und verifiziere

$$M_B(b) = \big(T_E^B\big)^t \cdot M_E(b)\cdot T_E^B.$$

Aufgabe 30: Es sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$, V ein K-Vektorraum und $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$. Zeige:

a. Es gibt eine symmetrische Bilinearform $b' \in \mathrm{Bil}_K(V)$ und eine schiefsymmetrische Bilinearform $b'' \in \mathrm{Bil}_K(V)$, so daß $b = b' + b''$.

b. Die Bilinearformen b' und b'' in a. sind eindeutig bestimmt.

c. Gelten die Aussagen in a. und b. auch noch, wenn $\operatorname{char}(K) = 2$? Beweis oder Gegenbeispiel!

Anmerkung, $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$ heißt *symmetrisch*, wenn $b(x,y) = b(y,x)$ für alle $x,y \in V$, und b heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $b(x,y) = -b(y,x)$ für alle $x,y \in V$.

Aufgabe 31: Es sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$.
Zeige, die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

a. b ist symmetrisch oder schiefsymmetrisch.

b. Für alle $x,y \in V$ mit $b(x,y) = 0$ gilt $b(y,x) = 0$.

Hinweis, für die Rückrichtung betrachte man $b = b' + b''$ gemäß Aufgabe 30 sowie $M_B(b)$, wobei B eine Orthogonalbasis von V bezüglich b' ist.

Aufgabe 32: Finde eine Matrix $T \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{Q})$, so daß $T^t \circ A \circ T$ eine Diagonalmatrix ist, wo A die folgende symmetrische Matrix ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3\times 3,\mathbb{Q}).$$