FB Mathematik | SS 2004, Blatt 9

Prof. Dr. Gert–Martin Greuel | Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 05/07/2004, 13:00 Uhr

Die Singular-Aufgabe ist erst am Donnerstag, den 08. Juli, um 08:00 Uhr einzureichen.

Aufgabe 33: Zeige, durch $\big((x_1,x_2,x_3)^t,(y_1,y_2,y_3)^t\big) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$ für $(x_1,x_2,x_3)^t,(y_1,y_2,y_3)^t \in \mathbb{R}^3$ wird ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

Aufgabe 34: [Adjungierte Abbildung]

Es sei $\big(V,(\cdot,\cdot)\big)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Raum und $f \in \operatorname{End}_K(V)$. Zeige:

a. Es gibt genau ein $f^* \in \operatorname{End}_K(V)$, die sogenannte *Adjungierte* von f, mit $\big(f(x),y\big) = \big(x,f^*(y)\big)$ für alle $x,y \in V$.

b. Ist $B = (x_1,\ldots,x_n)$ eine Basis von V und $G = \big((x_i,x_j)\big)_{i,j=1,\ldots,n} \in \operatorname{Mat}(n,K)$ die sogenannte *Gramsche Matrix* von B, dann gilt G ist invertierbar und

$$M_B^B\big(f^*\big) = \overline{G}^{-1} \circ \overline{M_B^B(f)}^t \circ \overline{G}.$$

Insbesondere gilt, ist B eine Orthonormalbasis, dann ist $M_B^B\big(f^*\big)$ die adjungierte Matrix von $M_B^B(f)$.

Hinweise, in Teil a. betrachte man eine ONB $B = (x_1,\ldots,x_n)$ und definiere $f^*(x_i)$ als Linearkombination der x_j in geeigneter Weise. In Teil b. zeige man zunächst $G \circ \overline{M_B^B(f^*)} = M_B^B(f)^t \circ G$. Für die Invertierbarkeit von G zeige man $G = A^t \circ \overline{A}$ mit $A = T_D^B$, wobei D ein Orthonormalbasis von V ist.

Aufgabe 35: [Äquivalente Normen]

Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und V ein K-Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ auf V heißen *äquivalent*, kurz $\|\cdot\| \sim |\cdot|$, falls es Konstanten $m, M \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $m \cdot \|x\| \leq |x| \leq M \cdot \|x\|$ für alle $x \in V$. Zeige:

a. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf V.

b. Je zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ auf K^n sind äquivalent.

Hinweis: In b. reicht es, den Fall $||\cdot|| = ||\cdot||_2$ zu betrachten. Man zeige zunächst die Existenz von M und folgere daraus, daß die Abbildung $|\cdot| : (K^n, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ stetig ist. Um m zu finden, verwende man sodann aus der Analysis, daß $S^{n-1} = \{x \in K^n \mid ||x||_2 = 1\}$ kompakt in $(K^n, ||\cdot||_2)$ ist und daß stetige Funktionen auf einem Kompaktum ihr Minimum annehmen.

Aufgabe 36: Schreibe eine rekursive Singular-Prozedur `sgauss`, die eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ einliest und mittels des symmetrischen Gauß-Algorithmus auf Diagonalgestalt transformiert. Dabei verwende man den folgenden Algorithmus:

INPUT: $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ symmetrisch.

OUTPUT: $D \in \mathrm{Mat}(n, K)$ Diagonalmatrix mit $\exists\, T \in \mathrm{Gl}_n(K) \;:\; T^t \circ A \circ T$ Diagonalgestalt hat.

1. Schritt Überprüfe, ob A symmetrisch ist.

2. Schritt Man suche in der ersten Spalte von A den ersten Eintrag, der nicht Null ist. Existiert ein solcher, merke man sich die Zeilennummer z, sonst gehe man zu Schritt 5.

3. Schritt Ist $z \neq 1$, addiere die z-te Zeile von A zur ersten und die z-te Spalte zur ersten.

4. Schritt Für $k = 2, \ldots, n =$ `ncols(A)` addiere man das $-A[1,k]/A[1,1]$-fache der ersten Zeile von A zur k-ten und das $-A[1,k]/A[1,1]$-fache der ersten Spalte zur k-ten.

5. Schritt Falls $n > 1$, dann erzeuge man eine Matrix B, indem man aus A die erste Zeile und die erste Spalte streicht. Ferner rufe man die Prozedur `sgauss` mit B auf und speichere das Ergebnis in `submat(A,2..n,2..n)`.

6. Schritt Man gebe A zurück.