FB Mathematik SS 2004, Blatt 10

Prof. Dr. Gert–Martin Greuel Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 12/07/2004, 13:00 Uhr

Aufgabe 37:

a. Bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Skalarproduktes aus Aufgabe 33.

b. Bestimme eine Orthonormalbasis des Unterraumes $V = \big\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto at^2 + bt + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathcal{C}^0\big([0,1]\big)$ bezüglich des Skalarproduktes $(\cdot,\cdot) : V \to \mathbb{R} : (f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Aufgabe 38: [Normale Abbildungen]

Es sei $\big(V, (\cdot,\cdot)\big)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. f heißt *normal*, falls $f \circ f^* = f^* \circ f$. Entsprechend heißt eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ *normal*, falls $A \circ \overline{A}^t = \overline{A}^t \circ A$. Zeige:

a. Ist B eine Orthonormalbasis von V, dann ist f genau dann normal, $M_B^B(f)$ normal ist.

b. Ist $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ hermitesch, dann ist A normal.

c. Ist $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ unitär, dann ist A normal.

Aufgabe 39: Es sei $\big(V, (\cdot,\cdot)\big)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$.
Zeige, ist f normal, dann gelten:

a. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^*\right)$.

b. $V = \mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$.

c. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^*\right)$.

Aufgabe 40: Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum. Eine Abbildung $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ heißt *Spiegelung* an $\langle x\rangle^\perp$ (für $0 \neq x \in V$), falls $f(x) = -x$ und $f(y) = y$ für alle $y \in \langle x\rangle^\perp$. Zeige, ist $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ eine Spiegelung an $\langle x\rangle^\perp$, dann gelten:

a. f ist orthogonal.

b. $\det(f) = -1$ und $f^2 = \mathrm{id}_V$.

c. Für $y \in V$ gilt: $f(y) = y - \frac{2(x,y)}{(x,x)} x$.