FB Mathematik — SS 2004, Blatt 11
Prof. Dr. Gert–Martin Greuel — Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 26/07/2004, 13:00 Uhr

Aufgabe 41: Bestimme eine orthogonale Matrix $T \in O(3)$, die die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ diagonalisiert:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42: Es sei $\big(V, (\cdot,\cdot)\big)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeige:

a. Ist f normal und sind $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$, dann gilt $\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mathrm{Eig}\left(f^*, \overline{\lambda}\right)$ und $\mathrm{Eig}(f,\lambda) \perp \mathrm{Eig}(f,\mu)$.

b. Ist $K = \mathbb{C}$ und ist f normal, dann ist f diagonalisierbar.

c. Ist $K = \mathbb{C}$, dann sind gleichwertig:

   (a) f ist normal.

   (b) Es gibt eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren.

Hinweis: In Teil b. betrachte man zunächst den Fall f selbstadjungiert und $f^2 = 0$; dann untersuche man den Fall f normal und $f^2 = 0$, wobei man die Abbildung $f^* \circ f$ betrachte; daraus leite man den Fall $\mu_f = t^s$ her; und schließlich führe man den allgemeinen Fall auf diesen zurück. – Man verwende ohne expliziten Beweis Aussagen wie $\left(f^*\right)^* = f$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ oder $(g - \lambda \mathrm{id})^* = g^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}$, die unmittelbar durch Betrachtung einer Matrixdarstellung der Abbildungen folgen.

Aufgabe 43: Es sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ so, daß es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^m = \mathrm{id}_V$. Zeige, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a. f ist unitär.

b. f ist normal.

c. Für Eigenwerte $\lambda \neq \mu$ von f gilt $\mathrm{Eig}(f,\lambda) \perp \mathrm{Eig}(f,\mu)$.