Multipliziert man die Lagrange'schen Ableitungen mit $\dot{x}_\alpha$ und summiert man über α, so ergibt sich:

$$(9)\quad \dot{x}_\alpha \mathcal{L}_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha}\right) - \ddot{x}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} - \dot{x}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha}$$

Wird nun zugelassen, dass in der Lagrange-Funktion L die Zeit t explizit auftritt, also $L = L(x\dot{x}t)$, so wird

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha}\dot{x}_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha}\ddot{x}_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Daraus folgt

$$(10)\quad \dot{x}_\alpha \mathcal{L}_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha}\right) - \frac{d\mathcal{L}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$
$$\equiv \frac{d\mathcal{H}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Ist nun t in $L(x\dot{x})$ explizit nicht enthalten, so ist $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$.

Für jede Lösung der Differentialgleichung $L_\alpha = 0$ ergibt sich also

$$(11)\quad 0 = \frac{d\mathcal{H}}{dt}; \quad \mathcal{H}(\dot{x}x) = h$$

wo h Integrationskonstante ist.

2. Invariantes Variationsproblem.

Im Ausnahmefall $H \equiv 0$ ergibt sich

$$(11^{a})\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha}\dot{x}_\alpha - \mathcal{L}(x\dot{x}) \equiv 0$$