d.i. die Euler'sche Homogenitäts-Bedingung, also ist in diesem Falle $L(x\dot{x})$ homogen in $\dot{x}_\alpha$ von der Dimension 1. d.h.

$$\mathcal{L}(x, \kappa \dot{x}_\alpha) = \kappa \, \mathcal{L}(x, \dot{x}_\alpha) \tag{12}$$

Dann ist aber auch $\dot{x}_\alpha L_\alpha \equiv 0$, die Lagrange'sche Differentialgleichungen sind linear abhängig, wir haben also nicht genügend (nämlich $n-1$) Differentialgleichungen, um alle n Funktionen $x_\alpha(t)$ festzulegen. Der tiefere Grund hierfür ist, dass in diesem Fall das Variationsproblem invariant gegen beliebige Parametertransformation ist. Ersetzen wir nämlich t durch $\varphi(t)$, dann wird aus

$$dt \,|\, \dot{\varphi}\, dt, \quad \dot{x}_\alpha \,|\, \frac{1}{\dot{\varphi}} \dot{x}_\alpha \quad \text{und} \quad \mathcal{L} \,|\, \frac{1}{\dot{\varphi}} \mathcal{L}$$

also aus L dt wieder Ldt; d.h. Ldt ist invariant gegen Parametertransformation. Das Integral I hängt nur von der Kurve ab, die im n-dimensionalen Raum mit den Koordinaten $(x_1, \dots x_n)$ (R_n) durch die n Funktionen $x_\alpha(t)$ festgelegt wird, da bei der Darstellung der Kurve in dieser Form der Parameter frei ist. Um ihn bestimmt zu machen, wählen wir als Parameter I, also $L(x\dot{x}) = 1$.

Der vornehmste Fall eines solchen geometrischen Variationsproblems ist das der geodätischen Linien im Raum beliebiger Krümmung; Bogenelement $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta$

Kurve $x_\alpha = X_\alpha(t)$.

Für die geodätischen Linien ist dann

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{\alpha\beta}\, \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta}\; dt = 0$$