$L = \sqrt{g_{\alpha\beta}\, \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta}$ ist homogen von 1. Dimension in $\dot{x}_\alpha$.

Z.B. ergeben sich die Differentialgleichungen der geodätischen Linien der Ebene im euklidischen Raum aus

$$\delta \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\, dt = 0 :$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &\equiv - \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}\, \dot{x}_2 \\ \mathcal{L}_2 &\equiv \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}\, \dot{x}_1 \end{aligned}\right\} \dot{x}_1 \mathcal{L}_1 + \dot{x}_2 \mathcal{L}_2 \equiv 0$$

$L_1 = 0 \quad L_2 = 0$ ergeben nur eine Gleichung: $\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1 = 0$, Integration ergibt $c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 = 0$, dann $c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_3$, also wie zu erwarten, die Gleichung der Geraden.

Da die Invarianzeigenschaft aus der Homogenität des Integranden folgt, können wir neben das allgemeine Variationsproblem

$$\mathfrak{J} = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}(x\dot{x})\, dt, \qquad \mathcal{H}(x\dot{x}) = h$$

immer ein geometrisches stellen. Setzen wir nämlich

$$\mathcal{H}\left(x, \frac{\dot{x}}{\lambda}\right) \equiv \frac{\dot{x}_\alpha}{\lambda}\, y_\alpha\left(x, \frac{\dot{x}}{\lambda}\right) - \mathcal{L}\left(x, \frac{\dot{x}}{\lambda}\right) = c$$

und bestimmen hieraus die Funktion $\lambda(x\dot{x})$, so ist diese homogen in $\dot{x}_\alpha$ von 1. Dimension, also $\lambda(x, \kappa\dot{x}) = \kappa\lambda(x\dot{x})$

$\lambda(x\dot{x})$ setzen wir ein in

$$\mathcal{L}^*(x\dot{x}) = \lambda\left[\mathcal{L}\left(x\frac{\dot{x}}{\lambda}\right) + c\right]$$