Da die bisher gelösten partiellen Differentialgleichungen sämtlich durch Trennung der Variabeln gelöst werden konnten, machen wir auch hier einen entsprechenden Ansatz. Wir zerlegen $\mathcal{S}$ additiv in zwei Teile, wo der erste von der Länge r, der zweite von der Richtung allein abhängt, also

$$\mathcal{S} = \varphi(r) + \psi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$$

Hierbei ist ψ homogen von Dimension 0, also $x_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} = 0$

$$\mathcal{S}_{x_\alpha} = \frac{x_\alpha}{r} \varphi'(r) + \psi_{x_\alpha}$$

$$\mathcal{S}_{x_1}^2 + \mathcal{S}_{x_2}^2 + \mathcal{S}_{x_3}^2 = (\varphi'(r))^2 + 2 \frac{\varphi'(r)}{r} \underbrace{x_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}}_{0} + \psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2 + \psi_{x_3}^2$$

Die Differentialgleichung lautet also

$$\{\varphi'(r)\}^2 + \psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2 + \psi_{x_3}^2 = 2\left[\mathcal{U}(r) + \ell\right]$$

Können wir jetzt erreichen, dass $\sum \psi_{x_\alpha}^2$ eine Funktion F(r) von allein wird, dann liegt eine gewöhnliche Differentialgleichung vor. Diese Forderung bestimmt aber schon die Form von $\mathcal{F}(r)$ Denn da $\psi(x_1 x_2 x_3)$ von der Dimension 0 ist, muss $\psi_{x_\alpha}^2$ von der Dimension - 2 sein. Da aber r selbst von der Dimension 1 in den x_1 x_2 x_3 ist, so muss F(r) in r von (- 2)ter Dimension sein, also von der Form $\frac{c^2}{r^2}$. Es ergibt sich durch unsere Forderung

$$\psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2 + \psi_{x_3}^2 = \frac{c^2}{r^2}$$

Unsere Differentialgleichung lautet jetzt