Z.B. ist im Fall der elliptischen Bahn $u - \ell = e \sin u$ periodisch in ℓ mit der Periode 2π; es ist also Entwicklung in eine Fourierreihe möglich, um deren Konvergenz es sich handeln wird. Ferner ist in der Astronomie e klein, sodass es naheliegt, u als Potenzreihe in zu entwickeln, wo ℓ in den Koeffizienten auftritt, d.h. $u = \sum_0^\infty a_\nu(\ell) e^\nu$

In beiden Fällen kommt es bei Untersuchung der Konvergenzverhältnisse darauf an, was zu sagen ist über die singulären Stellen der Umkehrfunktion.

b. Satz von Hurwitz über die singulären Stellen von Umkehrfunktionen.

Da in der Astronomie vielfach falsche Schlüsse betreffend das Verhalten der Umkehrfunktion an singulären Stellen vorkommen, wollen wir an dieser Stelle einen Satz von Hurwitz beweisen, den dieser 1906 in den Comptes Rendues veröffentlichte und der gerade über singuläre Stellen von Umkehrfunktionen etwas aussagt. Der Satz von Hurwitz lautet:

Die kritischen Stellen, ~~die~~ Umkehrfunktion von $x = f(y)$ sind, enthalten unter den Stellen $\xi = f(y_0)$, wo $f'(y_0)$ verschwindet, und den Werten ξ, gegen die $f(y)$ konvergiert, wenn y auf irgend einem Weg sich ins Unendliche bewegt. Dabei bedeutet $x = f(y)$ eine meromorphe Funktion. Der Beweis dieses Satzes erfolgt in drei Schritten:

1. Es sei an einer Stelle y_0 : $f'(y_0) \neq 0$, $x_0 = f(y_0)$ $f(y)$ regulär und $\neq f(y_0)$ im Kreis $|y - y_0| \leq \rho$ und $\frac{\mu}{\rho} = \text{Min} \left| \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \right|$

Ist dann $|x - x_0| < \mu$, so hat $x = f(y)$ genau eine Wurzel im Kreis $|y - y_0| < \rho$ und für diese gilt $y - y_0 = \mathfrak{P}(x - x_0)$, eine Potenzreihe, die in dem Kreis $|x - x_0| < \mu$ konvergiert.

Dies folgt aus dem Rouché'schen Satz: Sind $f(z)$ und $g(z)$ regulär