Ist nun $\ell \neq \nu\pi$, dann haben diese beiden Gleichungen dasselbe Wurzelpaar u und $\bar{u}$; d.h. $u_1 = u_0$. Daraus folgt, dass

ℓ_0 Singularitätsstelle ist, wenn $\varphi(\ell_0) = u_0$;

Regularitätsstelle dagegen, wenn $\varphi(\ell_0) \neq u_0$ ist.

Nehmen wir an, dass $\varphi(\ell_0) \neq U_0$ ist, so sind Singularitätsstellen nur für reelle ℓ_0 möglich, für die $|\ell_0| \geqq 1$. Schneiden wir die ℓ-Ebene von ± 1 aus bis ins Unendliche längs der reellen Achse auf, so müsste sich dann $u = \varphi(\ell)$ in die ganze so aufgeschnittene ℓ-Ebene fortsetzen lassen. Das führt aber zu einem Widerspruch, sobald wir einen Weg in der u-Ebene angeben können, der $u = \ell$ mit $u = u_0$ so verbindet, dass für die u-Werte dieses Weges $\ell = f(u)$ längs einer Kurve läuft, die ganz in der aufgeschnittenen Ebene verläuft. Denn wenn wir einen derartigen Weg angeben können, so ist zunächst ja $f(u_0) = \ell_0$, da $u_0 - \ell_0 \sin u_0 = \ell$, also

$$\ell_0 = \frac{u_0 - \ell}{\sin u_0}$$

ist. Anderseits lässt sich dann $u = \varphi(\ell)$ längs dieses Weges von $\ell = 0$ bis $\ell = \ell_0$ fortsetzen, also $u = \varphi(f(u))$; $u_0 = \varphi(\underbrace{f(u_0)}_{\ell_0})$, was unserer Annahme $u_0 \neq \varphi(\ell_0)$ widerspricht. Ein solcher Weg ist aber leicht zu finden: Man braucht nur den Weg von $u = \ell$ nach $u = u_0$ so zu führen, dass er innerhalb des Streifenes verläuft, der festgelegt ist durch die Ungleichungen: