Durch die Transformation $(x_\alpha y_\alpha \leftrightarrow u_\mu)$ ist noch eine zweite lineare Transformation gegeben und zwar die zur ersten linearen Transformation kontragradiente. Ist nämlich $f(x_1 \dots x_n\; y_1 \dots y_n)$ irgend eine Funktion von $x_\alpha\; y_\alpha$, so hängen $\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial y_1} \dots \frac{\partial f}{\partial y_n}$ und $\frac{\partial f}{\partial u_1} \dots \frac{\partial f}{\partial u_{2n}}$ durch lineare Transformationen zusammen, da

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial u_\mu}\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\alpha} \qquad \frac{\partial f}{\partial u_\mu} = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_\mu} + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\frac{\partial y_\alpha}{\partial u_\mu} \text{ ist.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial u_\mu}\frac{\partial u_\mu}{\partial y_\alpha}$$

Diese Transformation ist kontragradient zur ersten, weil sich in I und II die Variablen transformieren wie Ebenen- und Punktkoordinaten. Es ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}dx_\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}dy_\alpha = \frac{\partial f}{\partial u_\mu}du_\mu \quad .$$

Ferner führen wir ein zu dem 1. System kogradientes System von Differentialen ein:

$$\delta x_1 \dots \delta x_n\; \delta y_1 \dots \delta y_n \longleftrightarrow \delta u_1 \dots \delta u_{2n}$$

wo sich also die $\delta x_\alpha, \delta y_\alpha$ transformieren wie die $dx_\alpha\; dy_\alpha$. Ausserdem fügen wir ein zweites kontragradientes System hinzu:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g}{\partial x_n}, \frac{\partial g}{\partial y_1} \dots \frac{\partial g}{\partial y_n} \longleftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u_1} \dots \frac{\partial g}{\partial u_{2n}} \,.$$

Damit gelangen wir sofort zu den Lagrange'schen und Poisson'schen Klammerausdrücken und den für sie geltenden Beziehungen. Aus den beiden Systemen $dx_\alpha\; dy_\alpha$ und $\delta x_\alpha, \delta y_\alpha$ bilden wir die Bilinear-