Satz: Falls n unabhängige Integrale eines kanonischen Systems

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1 \dots n)$$

in Involution liegen, dann sind die restlichen n Integrale durch Quadratur bestimmbar.

Zum Beweis setzen wir also voraus, n Integrale: $u_\mu(x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n t)$ seien bekannt, die von einander unabhängig und für die

$$(u_\mu u_\nu) = 0 \quad (\mu, \nu = 1 \dots n) \text{ ist.}$$

Dann können wir nach dem Vorhergehenden eine kanonische Transformation $p_1 \dots p_n \; q_1 \dots q_n$ durch Quadratur bestimmen, für die gerade $q_\mu = u_\mu \; (\mu = 1 \dots n)$ ist. Diese Transformation, auf die kanonischen Gleichungen ausgeübt, liefert:

$$\frac{dq_\mu}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_\mu}$$

Da aber die u_μ Integrale waren, so ist längs der Lösungen x_α y_α immer u_μ = const, d.h. für unser System ist $\frac{dq_\mu}{dt} = 0$. Demnach ist

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial p_\mu} = 0, \quad \mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(q, t)$$

Setze ich $q_\mu = a_\mu$ = constant, so ist

$$\frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{\partial}{\partial a_\mu} \mathcal{H}^*(a_1 \dots a_n t)$$

$$p_\mu = -\frac{\partial}{\partial a_\mu} \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}^*(a_1 \dots a_n t)\, dt + C_\mu.$$

p_μ ergibt sich also durch reine Quadratur. Aus p_μ und q_μ bestimmen