$\varphi_1(z)$ bestimmt. Entsprechend setze ich $\varphi_2(\infty) = 1$ und setze $\varphi_2(z)$ fort in die längs der positiv reellen Achse von $z = 0$ bis $z = \alpha$ aufgeschlitzte z-Ebene fort. Dann ist $Z^{-1} = \varphi_1(z)\,\varphi_2(z)$ eindeutig und regulär in der z-Ebene, die längs der positiven reellen Achse aufgeschnitten ist von $z = 0$ bis $z = \alpha$ und von $z = \frac{1}{\alpha}$ bis $z = \infty$. Setzen wir jetzt $z = E^{i\Theta}$, d.h. durchläuft z den Einheitskreis, dann ist infolge unserer Bestimmung $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_2(\infty) = 1$: Z^{-1} reell positiv. Denn $\varphi_1(1)$ ist positiv reell, da $\varphi_1(z)$ auf der positiv reellen Achse von 0 bis $\frac{1}{\alpha}$ reell positiv ist; ferner ist $\varphi_2(1)$ positiv reell, da $\varphi_2(z)$ auf der reellen Achse von $z = \alpha$ bis $z = \infty$ positiv reell ist. Demnach ist $Z^{-1}(1)$ positiv reell. Aber

$Z(z) = 1 + \alpha^2 - \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right)$ ist für $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$\underset{|z|=1}{Z(z)} = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi \geqq 1 + \alpha^2 - 2\alpha = Z(1).$$

Also ist Z^{-1} auf dem Einheitskreis positiv reell. Z^{-1} ist regulär in dem Kreisring $\alpha < |z| < \frac{1}{\alpha}$, sodass dort Z^{-1} eine Laurententwicklung gestattet:

$$Z^{-1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_1^{\nu} z^{\nu}.$$

Vertauschen wir in Z: z mit $\frac{1}{z}$, so ändert sich Z nicht. Demnach ist $A_1^{\nu} = A_1^{-\nu}$, sodass sich unsere Reihe schreiben lässt

$$Z^{-1} = A_1^0 + \sum_{1}^{\infty} A_1^{\nu}\left(z^{\nu} + \frac{1}{z^{\nu}}\right)$$

Für $z = e^{i\Theta}$ ergibt dies schliesslich