Demnach ist

$$2\cos(n\Theta) = P_n(\cos\Theta) - P_{n-2}(\cos\Theta)$$

Anstelle von $\cos(n\Theta)$ genügt es also, $P_n(\cos n\Theta)$ nach $\mathfrak{J}$, x und y zu entwickeln. Da

$$\cos\Theta = \cos^2\frac{\mathfrak{J}}{2}\cos x + \sin^2\frac{\mathfrak{J}}{2}\cos y \text{ ist,}$$

so ist $P_n(\cos\Theta)$ ein Polynom in $\sin^2\frac{\mathfrak{J}}{2}$, cos x und cos y, das wir schreiben können:

$$P_n = \sum_{\mu\nu}^{n} P_{\mu\nu}\left(\sin^2\frac{\mathfrak{J}}{2}\right)\cos(\mu x + \nu y)$$

Um P_n zu entwickeln, genügt also die Kenntnis der Polynome $P_{\mu\nu}(\sin^2\frac{\mathfrak{J}}{2})$. Einen sehr eleganten Weg hat Stieltjes eingeschlagen, indem er feststellt, dass die P_n im vierdimensionalen Raum anstelle der Laplaceschen Polynome bei Entwicklung der Grundlösung der Potentialgleichung auftreten. Denn im vierdimensionalen Raum ist die Grundlösung der Potentialgleichung

$$\frac{1}{R^2} \equiv (1 - 2\alpha\cos\Theta + \alpha^2)^{-1}$$

Wir ziehen also zur Behandlung des Problems die Koordinaten eines vierdimensionalen Raumes heran. Es ist dann:

$$R^2 = \sum_1^4 (x_i - x_i')^2 \text{ und für } V = R^{-2}: \quad \begin{array}{l} \Delta V = 0 \\ \Delta' V = 0. \end{array}$$