5. Zwischenintegrale der Säkulargleichungen und ihr Zusammenhang mit den Flächenintegralen des exakten Problems. -

Bei der Integration der Säkulargleichungen hatte sich bereits als Zwischenintegrale ergeben

$$S\,(x_1 \dots x_k\, y_1 \dots y_k) = \text{const.}$$

und $\sum_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) = \text{const.}$

Letzteres Integral folgt aus der Orthogonalinvarianz von $\mathcal{S}$. Denn $2\,S = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}\,(x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta)$ ist die Summe der inneren Produkte der Vektoren $(x_\alpha\, y_\alpha)$ und $(x_\beta\, y_\beta)$. Da aber die Hamilton'sche Funktion S Orthogonalinvariante der Vektoren $(\xi_i^{\nu}\, \eta_i^{\nu})$ ist, so ist es auch S_1 für $(\xi_1^{\nu}\, \eta_1^{\nu})$ und S_2 für $(\xi_2^{\nu}\, \eta_2^{\nu})$, d.h. $\mathcal{S}$ für $(x_\alpha\, y_\alpha)$. Diese Orthogonalinvarianz zieht nach sich, dass

$$\delta\mathcal{S} = 0 \text{ ist für } \delta x_\alpha = \varepsilon\, \delta y_\alpha, \quad \delta y_\alpha = -\varepsilon\, \delta x_\alpha .$$

Demnach ist

$$\sum_\alpha y_\alpha \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_\alpha} - x_\alpha \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y_\alpha} = 0$$

Aus den Differentialgleichungen des säkularen Systems folgt hieraus

$$\sum_\alpha y_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} + x_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} = 0$$

woraus durch Integration folgt

$$\sum_\alpha (y_\alpha^2 + x_\alpha^2) = \text{const.}$$

Das bedeutet, dass für die Exzentrizitätsvariabeln $\sum_\nu \xi_1^{(\nu)\,2} + \eta_1^{(\nu)\,2} \equiv \sum_\nu \varrho_1^{(\nu)\,2} = \text{const.}$