Resultate von Lagrange erweitert und ein ähnliches Theorem aufgestellt, für den Fall, dass man die in $\frac{m_\nu}{m}$ quadratischen Glieder mitberücksichtigt. Für diese 2. Approximation ergibt sich nämlich, dass die Entwicklung der grossen Halbachsen wohl gemischt säkulare, jedoch keine rein säkularen Terme enthalten. Zum Beweis dieser Tatsache gehen wir entsprechend wie beinder Ableitung des Lagrange'schen Theorems und der Säkulargleichungen vor. Wir setzen $\varepsilon_\nu = \frac{m_\nu}{m}$ und ersetzen $\mathcal{L}_\nu$ durch

$$\mathcal{L}_\nu^0 + \varepsilon\delta\mathcal{L}_\nu + \varepsilon^2\delta^2\mathcal{L}_\nu$$

Wie wir wissen ist

$$\mathcal{F} = \mathcal{S} + \sum_\alpha A\cos\Lambda + B\sin\Lambda$$

wo $\Lambda = \alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k$ ist. Da $\lambda_\nu = n_\nu t + \text{const}$ zu setzen ist, so ist $\Lambda = \mathcal{N}t + \text{const}$, wenn wir $N = a_1 n_1 + \ldots a_k n_k$ setzen. Es ist zweckmässig für $\int \mathcal{F}dt$ eine besondere Bezeichnung G einzuführen. Dann ist

$$\mathcal{G} = \mathcal{S}t + \sum_\alpha\left(-\frac{B}{\mathcal{N}}\cos\Lambda + \frac{A}{\mathcal{N}}\sin\Lambda\right)$$
$$= \mathcal{S}t + \mathcal{G}^*, \qquad \left(\mathcal{G}^* = \sum -\frac{B}{\mathcal{N}}\cos\Lambda + \frac{A}{\mathcal{N}}\sin\Lambda\right)$$

Wir setzen

$$\int \mathcal{G}\,dt = \mathcal{H} \quad , \quad \int \mathcal{G}^* dt = \mathcal{H}^*$$

und erhalten

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\mathcal{S}t^2 + \mathcal{H}^*$$