$$(**) \qquad u^2 - \Delta v^2 = 4$$

Ferner folgt für $w \to \infty$: $w' \to \frac{\alpha}{\gamma}$ d.h. $e^{\tau} = \frac{\alpha - \gamma q}{\alpha - \gamma p}$ Drücken wir α und γ hierin durch u und v aus, so ergibt sich endlich

$$\tau = 2 \log \left| \frac{u + v\sqrt{\Delta}}{2} \right|$$

Es ist ausserdem $\sqrt{D}$ sicher irrational. Denn aus $u^2 - \Delta v^2 = 4$ würde für $D = d^2$ folgen

$$(u + dv)(u - dv) = 4$$

Dann wäre

$$u + dv = \pm 4, \pm 2, \pm 1$$
$$u - d \cdot v = \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

Hieraus würde folgen

$$2u = \pm 5, \pm 4, \pm 5$$

Demnach ist

$$u \pm d \cdot v \neq 4, \neq 1$$

Wäre $u = \pm 2$, so wäre $Dv = 0$. D ist aber $\neq 0$, da $p > q$ ist. v ist $\neq 0$, da es der grösste gemeinsame Teil von $\delta - \alpha, \beta, \gamma$ sein sollte. Demnach ist $\sqrt{D}$ sicher irrational, p und q sind also konjugierte Irrationalitäten, was also notwendig dafür ist, dass C(p q) eine geschlossene Kurve ist. Es ist aber auch hinreichend. Denn man kann