Gruppentheorie

Aufgabe 1: Wir betrachten die Menge

$$Gl_2(K)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\;\middle|\; a,b,c,d\in K, ad-bc\neq 0\right\}$$

der *invertierbaren* 2×2-*Matrizen* mit Einträgen in K aus Beispiel 1.5 der Vorlesung, wobei $K=\mathbb{Q}$ oder $K=\mathbb{R}$ oder $K=\mathbb{C}$ gilt. Für Elemente in dieser Menge definieren wir zudem die Matrixmultiplikation durch

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} u & v\\ w & x\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} au+bw & av+bx\\ cu+dw & cv+dx\end{pmatrix}.$$

(a) Leite, wie in der Vorlesung angesprochen, Formeln für die Einträge u,v,w,x her, so dass

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} u & v\\ w & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & v\\ w & x\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

gilt.

(b) Finde Beispiele für Matrizen, so dass

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} u & v\\ w & x\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} u & v\\ w & x\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Betrachte die folgende Teilmenge

$$G=\{\varphi_{0^\circ},\varphi_{90^\circ},\varphi_{180^\circ},\varphi_{270^\circ}\}$$

der Menge aller Drehungen aus Beispiel 1.4 und berechne für diese die Einträge in der Gruppentafel:

$\circ$	φ_{0°	φ_{90°	φ_{180°	φ_{270°
φ_{0°				
φ_{90°				
φ_{180°				
φ_{270°				

Der Eintrag in der Tabelle in der Zeile mit φ_α und der Spalte mit φ_β soll dabei $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta$ eingetragen werden. Dabei sollen die Regeln aus der Vorlesung angewandt werden, dass die Gradzahlen zwischen 0 und 360 liegen und echt kleiner als 360 sind. Was fällt Dir bei der Betrachtung der Tabelle auf?

Aufgabe 3: Betrachte die Teilmenge

$$H = \left\{ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

der Menge der invertierbaren 2×2-Matrizen $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Q})$ an und berechne die Gruppentafel

$\circ$	E	A	B	C
E				
A				
B				
C				

für H wie in Aufgabe 2. Was fällt Dir an der Gruppentafel auf? Vergleiche sie auch mit der Gruppentafel in Aufgabe 2.