Gruppentheorie

Aufgabe 4: Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen bijektiv sind oder nicht:

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$.

(b) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 2x - 4$.

(c) $f \circ g$ und $g \circ f$ wobei $f : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$ und $g : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$ mit den Wertetabellen

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	1	3

und

x	1	2	3	4
$g(x)$	3	1	2	4

.

Berechne dazu zunächst die Wertetabellen von $f \circ g$ und $g \circ f$.

Aufgabe 5: Wir betrachten die eukldische Ebene

$$K = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

als Menge zusammen mit der komponentenweisen Addition

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$

als Operation.
Zeige, dass $(K, +)$ eine abelsche Gruppe ist, d.h. überprüfe, dass die vier Gesetze erfüllt sind.

Aufgabe 6: Wir betrachten nun die euklidische Ebene ohne den Ursprung

$$G := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (0, 0)\}$$

als Menge zusammen mit der folgenden Operation

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Zeige, dass $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, d.h. überprüfe, dass die vier Gesetze erfüllt sind.

Aufgabe 7: Zeige, dass die Menge der Matrizen

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (0, 0) \right\}$$

mit der gewöhnlichen Matrixmultiplikation eine Gruppe ist. Ist diese auch abelsch? Vergleiche diese mit der Gruppe $(G, \cdot)$ in Aufgabe 6. Was fällt Dir dabei auf?