Leibniz-Kolleg
Thomas Markwig

Januar / Februar 2020
Blatt 3

Gruppentheorie

Aufgabe 8: Zeige, in einer Gruppe sind die Inversen Elemente eindeutig bestimmt.

Aufgabe 9: Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ heißt $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag der komplexen Zahl und $\overline{z} = x - iy$ das komplex Konjugierte.

(a) Zeige, für zwei komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ gelten:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

und

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

(b) Berechne für $z = 3 + 2i$ und $w = 1 - i$ die folgenden Zahlen:

$$z + w, z \cdot w, |z|, \frac{1}{z}, \frac{z}{w}.$$

(c) Interpretiere die Betragsfunktion und die komplexe Konjugation geometrisch.

Aufgabe 10: Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$$

in der Gruppe $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen in den komplexen Zahlen.

(a) Berechne die Potenzen A^k für alle natürlichen Zahlen $k \geq 0$. Wie viele verschiedene Matrizen sind es? Kommt die Inverse A^{-1} darunter vor?

(b) Berechne die Potenzen B^k für alle natürlichen Zahlen $k \geq 0$. Wie viele verschiedene Matrizen sind es? Kommt die Inverse B^{-1} darunter vor?

(c) Berechne die Produkte $A^k \cdot B^l$ für alle natürlichen Zahlen $k, l \geq 0$. Wie viele verschiedene Matrizen sind es?

(d) Berechne das Produkt $A^{-1} \cdot B \cdot A$. Ist das eine der Matrizen, die schon in den vorhergeneden Teilen berechnet wurde?

(e) Stelle für die in c. berechneten verschiedenen Matrizen die Gruppentafel auf.

Aufgabe 11: Schaut Euch auf Youtube das Video

Gruppentheorie und
808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000

an, das auf der Playlist der Vorlesung verlinkt ist:

https://www.youtube.com/watch?v=mH0oCDa74tE&list=PLsqXvy06uyPbMmXXel1zqpCygsKpEQ1Cs