Gruppentheorie

Aufgabe 15: Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$$

sowie die davon erzeugte Untergruppe

$$\mathbb{Q}_8 = \langle A, B \rangle$$

der Gruppe $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen in den komplexen Zahlen. Bestimme alle Untergruppen von $\mathbb{Q}_8$.

Aufgabe 16: Wir betrachten die Permutationen

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) \in \mathbb{S}_4$$

und

$$\pi = (1\ 4) \circ (2\ 3) \in \mathbb{S}_4$$

sowie die davon erzeugte Untergruppe

$$\mathbb{D}_8 = \langle \sigma, \pi \rangle$$

der symmetrischen Gruppe $\mathbb{S}_4$. Bestimme alle Untergruppen von $\mathbb{D}_8$.

Aufgabe 17: Die eukldische Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition eine ist eine abelsche Gruppe. Welche der folgenden Abbildungen ist ein Gruppenhomomorphismus?

(a) $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x - y, y - x)$.

(b) $\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x + x \cdot y, 2x)$.

(c) $\gamma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x - 3y, 2x)$.

Aufgabe 18: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige, $\alpha : G \longrightarrow G : g \mapsto g^2$ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn G abelsch ist.