Gruppentheorie

§1 Beispiele

Beispiel 1.1: (ganze Zahlen)

$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ = Menge der ganzen Zahlen

Operation: Addition "+"

Gesetze: ① $(x+y)+z = x+(y+z)$ Assoziativgesetz

② $0 + x = x = x + 0$

③ $(-x) + x = 0 = x + (-x)$

④ $x + y = y + x$ Kommutativgesetz

Beispiel 1.2 (rationale Zahlen)

$\mathbb{Q}^* := \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ p, q \neq 0 \right\}$ = Menge der rationalen Zahlen ungleich 0

Operation: Multiplikation "·"

Gesetze: ① $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ Assoziativgesetz

② $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ "Existenz eines Neutralen"

③ $\frac{1}{x} \cdot x = 1 = x \cdot \frac{1}{x}$ "Existenz von Inversen"

④ $x \cdot y = y \cdot x$ Kommutativgesetz

Beispiel 1.3: Drehungen

φ_α = Drehung um den Winkel α um einen festen Punkt p

Verkettung von Drehungen

$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta}$, $\varphi_{360°} = \varphi_{0°}$, $\varphi_{\alpha+360°} = \varphi_\alpha = \varphi_{\alpha-360°}$

$D := \{ \varphi_\alpha \mid \alpha$ Winkel zwischen $0°$ und $360° \}$

<u>Operation:</u> Verkettung '$\circ$'

① $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta) \circ \varphi_\gamma = \varphi_{\alpha+\beta} \circ \varphi_\gamma = \varphi_{(\alpha+\beta)+\gamma} = \varphi_{\alpha+(\beta+\gamma)}$

$= \varphi_\alpha \circ (\varphi_{\beta+\gamma}) = \varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\gamma)$

② $\varphi_\alpha \circ \boxed{\varphi_{0°}} = \varphi_\alpha = \varphi_{0°} \circ \varphi_\alpha$

③ $\varphi_\alpha \circ \varphi_{360°-\alpha} = \varphi_{0°} = \varphi_{360°-\alpha} \circ \varphi_\alpha$

④ $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_{\beta+\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$

<u>Beispiel 1.4:</u> $(Gl_2(K), \circ)$

- 2×2 - Matrizen: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wobei $a, b, c, d \in K$

dabei ist $K = \mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \}$ = rationale Zahlen

oder $K = \mathbb{R} = \{$Dezimalzahlen$\}$ = reelle Zahlen

oder $K = \mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ = komplexe Zahlen

- $Gl_2(K) := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K,\ a \cdot d - b \cdot c \neq 0 \}$

- <u>Operation:</u> Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \langle 1.\text{Zeile}, 1.\text{Spalte} \rangle & \langle 1.\text{Zeile}, 2.\text{Spalte} \rangle \\ \langle 2.\text{Zeile}, 1.\text{Spalte} \rangle & \langle 2.\text{Zeile}, 2.\text{Spalte} \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \cdot u + b \cdot w & a \cdot v + b \cdot x \\ c \cdot u + d \cdot w & c \cdot v + d \cdot x \end{pmatrix} \quad !$$

$\left\langle \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} o \\ p \end{pmatrix} \right\rangle = m \cdot o + n \cdot p$ Skalarprodukt

Gesucht: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$

(1) $$(A \circ B) \circ C = \begin{pmatrix} au + bw & av + bx \\ cu + dw & cv + dx \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aum + bwm + avp + bxp & aun + bwn + avq + bxq \\ cum + dwm + cvp + dxp & cun + dwn + cvq + dxq \end{pmatrix}$$

$$A \circ (B \circ C) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} um + vp & un + vq \\ wm + xp & wn + xq \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aum + avp + bwm + bxp & aun + avq + bwn + bxq \\ cum + cvp + dwm + dxp & cun + cvq + dwn + dxq \end{pmatrix}$$

(2) $$A \circ B = \begin{pmatrix} a \cdot u + b \cdot w & a \cdot v + b \cdot x \\ c \cdot u + d \cdot w & c \cdot v + d \cdot x \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

d.h.:

$$\begin{aligned} (*)\quad au + bw &= a \\ av + bx &= b \\ (*)\quad cu + dw &= c \\ cv + dx &= d \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \quad a - a \cdot u = b \cdot w$$

$$a - a\cdot u = a \cdot (1-u)$$

$$\boxed{w = \frac{a}{b} \cdot (1-u) = \frac{a}{b} \cdot (1-1) = 0}$$

$$c = c \cdot u + dw = c \cdot u + d \cdot \frac{a}{b} \cdot (1-u)$$

$$= c \cdot u + d \cdot \frac{a}{b} - \frac{d \cdot a}{b} \cdot u$$

$$= \left(c - \frac{d \cdot a}{b}\right) \cdot u + \frac{d \cdot a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad c - \frac{d \cdot a}{b} = \boxed{\left(c - \frac{d \cdot a}{b}\right)} \cdot u \quad \Rightarrow \boxed{u = 1}$$

Analog: $v = 0$, $x = 1$

<u>Kandidat für das Neutrale:</u> $\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Test:</u> $A \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a\cdot 1 + b\cdot 0 & a\cdot 0 + b\cdot 1 \\ c\cdot 1 + d\cdot 0 & c\cdot 0 + d\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

③ $A \circ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \circ B = \begin{pmatrix} a\cdot u + b\cdot w & a\cdot v + b\cdot x \\ c\cdot u + d\cdot w & c\cdot v + d\cdot x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} au + bw &= 1 \\ av + bx &= 0 \\ cu + dw &= 0 \\ cv + dx &= 1 \end{aligned} \quad !$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$ Kandidat!

<u>Nachrechnen:</u> $A \circ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \circ A$

④ $A \circ B \neq B \circ A$ <u>i.a.</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 5\cdot 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$\#$

Aufgabe 2:

	φ_0	φ_{90}	φ_{180}	φ_{270}
φ_0	0	90	180	270
φ_{90}	90	180	270	0
φ_{180}	180	270	0	90
φ_{270}	270	0	90	180

Aufgabe 3.

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	B	C	E
B	B	C	E	A
C	C	E	A	B

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

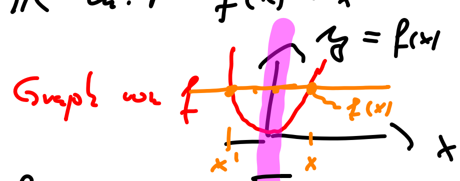
Beispiel 1.5: $(\mathrm{Sym}(M), \circ)$ symmetrische Gruppe von M

- **Abbildung / Funktion:**

  Seien M und N zwei Mengen.

  Eine Abbildung $f : M \to N$ (von M nach N) ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem Element von M genau ein Element von N zuordnet? M = Definitionsbereich, N = Zielbereich

  z.B.: ① $M = N = \mathbb{R}$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$



  ② $M = N = \{1, 2, 3, 4\}$, $f : M \to \underset{N}{\overset{\shortparallel}{M}}$ durch Wertetabelle angegeben

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	3	4	1

- **bijektive Abbildung:** Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt bijektiv, wenn für jedes $n \in N$ genau ein $m \in M$ gibt mit $f(m) = n$.

Bsp.: ① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht bijektiv,

weil · $f(1) = 1 = f(-1)$, aber $1 \neq -1$

· es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $\underbrace{f(x)}_{x^2} = -1$

② Bsp. ② von oben ist bijektiv, weil in der zweiten Zeile jede Zahl aus $\mathbb{N}$ genau einmal vorkommt!

③ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = x + 5$ ist bijektiv, denn wenn $n \in \mathbb{Z}$, dann gilt $f(n-5) = (n-5)+5 = n$ und $n-5$ ist das einzige

$(\underline{\text{denn}}: m+5 = f(m) = n \Rightarrow m = n-5)$

④ $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 2 \cdot x$ ist bijektiv

<u>denn</u>: $n = f(m) = 2 \cdot m$

$\Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{2} \cdot n$

⑤ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 2 \cdot x$ ist nicht bijektiv

<u>denn</u>: es gibt kein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$2 \cdot m = f(m) = 1$$

· <u>Operation für Selbstabbildungen</u>

Seien $f: M \to M$ und $g: M \to \underline{M}$ zwei Abbildungen.

Dann heißt $f \circ g: M \to M$ mit $(f \circ g)(m) := f(g(m))$ die Komposition von f und g

- Setze: $\mathrm{Sym}(M) := \{ f: M \to M \mid f \text{ ist bijektiv} \}$

- Gesetze:

① Assoziativität: $f, g, h \in \mathrm{Sym}(M)$

Gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$?

$$((f \circ g) \circ h)(m) = (f \circ g)(h(m)) = f(g(h(m)))$$

$$(f \circ (g \circ h))(m) = f((g \circ h)(m)) = f(g(h(m)))$$

② Neutrales Element: Identität auf M (ist bijektiv)

Betrachte: $id_M : M \to M$ mit $id_M(m) = m$

Dann: $(f \circ id_M)(m) = f(id_M(m)) = f(m)$

$$\Rightarrow f \circ id_M = f$$

$$(id_M \circ f)(m) = id_M(f(m)) = f(m)$$

$$\Rightarrow id_M \circ f = f$$

③ Inversen: Sei $f \in \mathrm{Sym}(M)$, d.h. $f: M \to M$ bijektiv

Definiere: $f^{-1} : M \to M$ wie folgt:

Weil f bijektiv ist, gibt es für jedes $n \in M$ genau ein $m_n \in M$ mit

$$\boxed{f(m_n) = n}$$

Setze: $f^{-1}(n) := m_n$

Dann: $(f \circ f^{-1})(n) = f(f^{-1}(n)) = f(m_n) = n = id_M(n)$

$$\Rightarrow f \circ f^{-1} = id_M$$

Ähnlich: $f^{-1} \circ f = id_M$

(4) i.a. nicht kommutativ

Bsp. Komposition:

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x+1$

$$\Rightarrow \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

(2) $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $f: M \to M$ und $g: M \to M$

mit

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	3	4	1

x	1	2	3	4
$g(x)$	2	1	4	3

x	1	2	3	4
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$	$f(g(1)) = f(2) = 3$	$f(g(2)) = 2$	$f(g(3)) = 1$	$f(g(4)) = 4$

Definition 1.6:

Sei G eine nicht-leere Menge und "$\cdot$" eine zweistellige Operation auf G, d.h. für alle $g, h \in G$ gilt $g \cdot h \in G$.

Dann heißt $(G, \cdot)$ eine Gruppe, wenn:

① $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ für alle $g, h, k \in G$ (AG)

② Es gibt ein $e \in G$, so dass für alle $g \in G$ gilt: $e \cdot g = g \cdot e = g$ ‖

③ Für alle $g \in G$ gibt es ein $g^{-1} \in G$ mit $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$ ‖

Wenn zusätzlich "④ Für alle $g, h \in G$ gilt $g \cdot h = h \cdot g$", dann heißt die Gruppe kommutativ oder abelsch.

Satz 1.7:

Sei G eine Menge und $\cdot$ eine Operation auf G, s.d. ① $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ für alle $g, h, k \in G$

② Es gibt $e \in G$ mit $e \cdot g = g$ für alle $g \in G$

③ Für alle $g \in G$ gibt es ein $g^{-1} \in G$ mit $g^{-1} \cdot g = e$.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) $g \cdot g^{-1} = e$ (b) $g \cdot e = g$

(c) e und g^{-1} sind eindeutig bestimmt.

Beweis:

(a) (3) $\Rightarrow$ es gibt ein $\tilde{g}$ mit $\boxed{\tilde{g} \cdot g^{-1} = e}$

$$\Rightarrow g \cdot g^{-1} \underset{(2)}{=} e \cdot (g \cdot g^{-1}) = (\tilde{g} \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot g^{-1})$$

$$\underset{(1)}{=} \tilde{g} \cdot (g^{-1} \cdot (g \cdot g^{-1})) \underset{(1)}{=} \tilde{g} \cdot (\underbrace{(g^{-1} \cdot g)}_{\underset{(3)}{=} e} \cdot g^{-1})$$

$$\underset{(3)}{=} \tilde{g} \cdot (e \cdot g^{-1}) \underset{(2)}{=} \tilde{g} \cdot g^{-1} = e$$

(b) (3) $\Rightarrow$ es gibt ein g^{-1} mit $\boxed{g^{-1} \cdot g = e}$

$$\Rightarrow g \cdot e = g \cdot (g^{-1} \cdot g) \underset{(1)}{=} (g \cdot g^{-1}) \cdot g \overset{(a)}{=} e \cdot g = g$$

(c) Zeige: es gibt nur ein Neutrales

Seien $e, \tilde{e} \in G$ mit $e \cdot g = \boxed{\tilde{e} \cdot g = g}$ für alle $g \in G$. Zu zeigen! $e = \tilde{e}$.

$$\Rightarrow \tilde{e} \underset{(b)}{=} \tilde{e} \cdot e = e$$

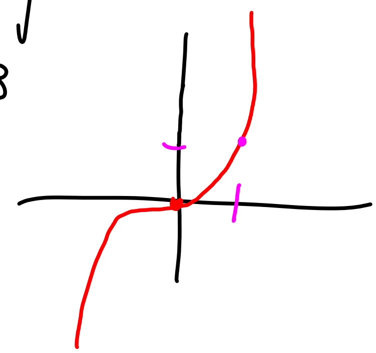
Rest ÜA. 5

Übungsaufgaben:

A4: Welche der Abb. sind bijektiv?

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$



(b) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 2x - 4$

$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$

$y = f(x) = 2x - 4 \quad | +4$

$\Leftrightarrow \quad y + 4 = 2x \quad | :2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{y+4}{2} = x$

(c)

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	1	3

x	1	2	3	4
$g(x)$	3	1	2	4

x	1	2	3	4
$f(g(x)) = (f\circ g)(x)$	1	2	4	3

x	1	2	3	4
$(g\circ f)(x)$	1	4	3	2

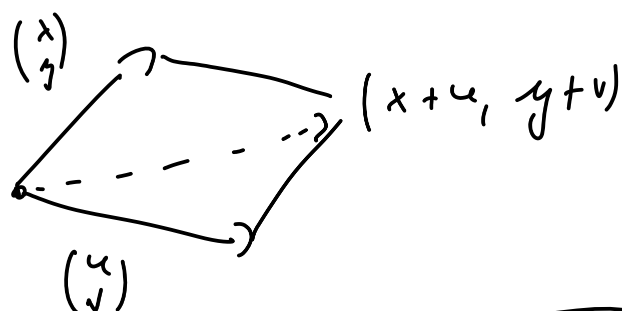
$$f(g(1)) = f(3) = 1$$

$\boxed{A5}$

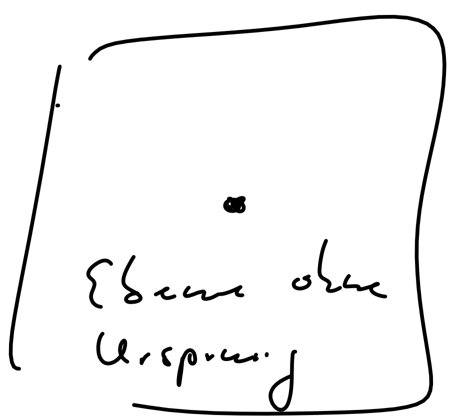
$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$(x,y) + (u,v) := (x+u,\ y+v)$$

Vektoraddition !



$\boxed{A6}$ $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} =$



$$(x,y)\cdot(u,v) := (xu - yv,\ xv + yu)$$

① AG ✓

② $e := (1, 0)$

$$(1,0)\cdot(x,y) = (1\cdot x - 0\cdot y,\ 1\cdot y + 0\cdot x) = (x,y)$$

③ $(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

$$(x,y)^{-1}\cdot(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)\cdot(x,y) =$$

$$= \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{-y^2}{x^2+y^2},\ \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} + \frac{-y\cdot x}{x^2+y^2}\right) = (1, 0)$$

④ KG ✓

A 7

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \middle|\ x,y\in\mathbb{R},\ (x,y)\neq(0,0) \right\}$$

Zeige: $(H, \circ)$ ist komm. Gruppe

① AG ✓ (gilt ja schon in $GL_2(\mathbb{R})$)

② $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

④ KG ✓

D

$\otimes$

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - yv & -xv - yu \\ yu + xv & -yv + xu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xu - yv & -(xv + yu) \\ xv + yu & xu - yv \end{pmatrix}$$

Noch z.z.: $(xu - yv,\ xv + yu) \neq (0,0)$

$$(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 =$$

$$x^2u^2 \cancel{- 2xuyv} + y^2v^2 + x^2v^2 \cancel{+ 2xvyu} + y^2u^2$$

$$= x^2u^2 + x^2v^2 + y^2v^2 + y^2u^2$$

$$= x^2 \cdot (u^2 + v^2) + y^2 \cdot (u^2 + v^2)$$

$$= \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(u^2 + v^2)}_{\neq 0} \neq 0$$

weil $(x,y) \neq (0,0)$ weil $(u,v) \neq (0,0)$

Definition 1.8: Komplexe Zahlen

Die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

mit den beiden Operationen

$$(x,y) + (u,v) := (x+u,\ y+v) \quad \text{(Vektoraddition)}$$
$$(x,y) \cdot (u,v) := (x\cdot u - y\cdot v,\ x\cdot v + y\cdot u)$$

nennt man den Körper der komplexen Zahlen.

Satz 1.9:

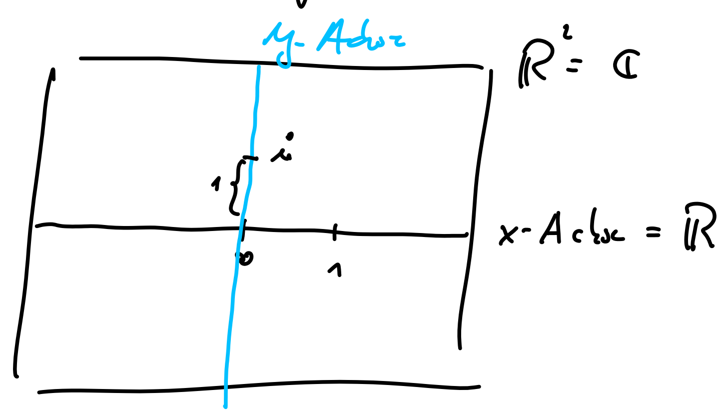
$(\mathbb{C},+,\cdot)$ sind ein Körper im algebraischen Sinne,

d.h.
1. $(\mathbb{C},+)$ ist abelsche Gruppe
2. $(\mathbb{C}\setminus\{(0,0)\},\cdot)$ " " "
3. DG: $(x,y)\cdot((u,v)+(r,s)) = (x,y)\cdot(u,v) + (x,y)\cdot(r,s)$

Notation 1.10:

$x + i\cdot y := (x,y)$, i = imaginäre Einheit!

<u>Wieso?</u>



Idee: $\underset{\substack{\text{reelle}\\\text{Zahl}}}{x} \mathrel{\hat{=}} \underset{\substack{\text{die Zahl auf}\\\text{der x-Achse}}}{(x,0)}$

. $i := (0,1)$

$$\Rightarrow .\ x + i\cdot y \mathrel{\hat{=}} (x,0) + (0,1)\cdot(y,0)$$
$$= (x,0) + (0\cdot y - 1\cdot 0,\ 0\cdot 0 + 1\cdot y) = (x,0) + (0,y) = (x,y)$$

• $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = (-1,0) \hat{=} -1$

• $(x,y)\cdot(u,v) \overset{1}{\hat{=}} (x+iy)\cdot(u+iv)$

$= (x+iy)\cdot u + (x+iy)\cdot i\cdot v$

$= x\cdot u + i\cdot y\cdot u + x\cdot i\cdot v + iy\cdot i\cdot v$

$= x\cdot u + i^2\cdot y\cdot v + i\cdot x\cdot v + i\cdot y\cdot u$

$= (x\cdot u - yv) + i\cdot(xv + yu)$

$\hat{=} (x\cdot u - yv,\ xv + yu)$

Aufgabe 8:

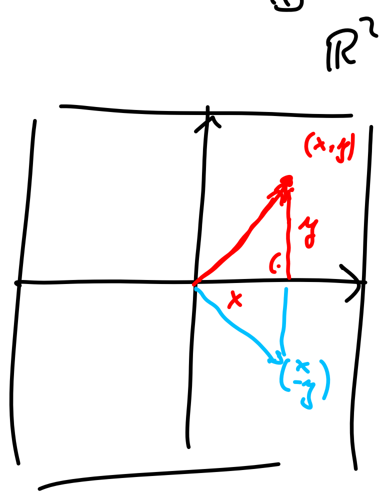
Beh: Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und sei $g\in G$.
Wenn $g', g''\in G$ mit $\underset{\substack{\shortparallel\\ g\cdot g'}}{g'\cdot g} = \underset{\substack{\shortparallel\\ g\cdot g''}}{g''\cdot g} = e$, dann: $g' = g''$.

Bew:
$$g' = g'\cdot e = g'\cdot(g\cdot g'') = (g'\cdot g)\cdot g'' = e\cdot g'' = g'' \quad \square$$

Aufgabe 9:

1.1: $\underset{\substack{\shortparallel\\ \mathbb{R}^2}}{\mathbb{C}} \longrightarrow \underset{\substack{\shortparallel\\ \mathbb{R}}}{\mathbb{C}} : x+iy \longmapsto \underset{\shortparallel}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Länge von $\binom{x}{y}$



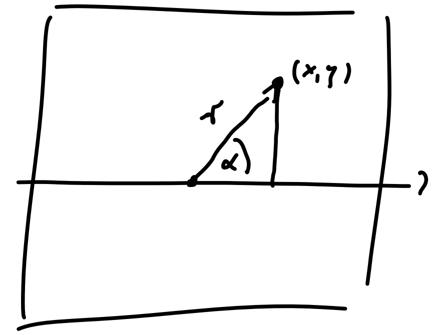
$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : x+iy \longmapsto x-iy$

Spiegelung an der x-Achse

(r, α) = Polarkoordinaten einer Komplexen Zahl

r = Länge von $\binom{x}{y}$
$= \sqrt{x^2+y^2}$

α = Winkel von $\binom{x}{y}$ mit x-Achse



Es gilt: (r, α) = Polarkoordinaten von $z = x+iy$
(s, β) = - - - - - - - von $w = u+iv$

$\Rightarrow$ $(r \cdot s, \alpha+\beta)$ = Polarkoordinaten von $z \cdot w$

d.h. Multiplikation mit einer Komplexen Zahl ist eine Drehstreckung!

Aufgabe 10: $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$

(b) $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B^4$ //

(c)

	B^0	B^1	$B^2 = -\mathbb{1}_2$	B^3
A^0	$\mathbb{1}_2$	B	$B^2 = A^2$	B^3
A^1	A	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$-A = A^3$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$
$-\mathbb{1}_2 = A^2$	$A^2 = B^2$	$-B = B^3$	$\mathbb{1}_2$	$-B^3 = B$
A^3	A^3	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$-A^3 = A$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$A \circ B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\cancel{B \circ A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}$

$A \circ B^3 = -A \circ B$

§ 2 Die symmetrische Gruppe

Definition 2.1:

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

Dann: $S_n := \mathrm{Sym}(\{1,\dots,n\}) = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \sigma \text{ ist bijektiv}\}$

Bemerkung: S_n ist mit der Verknüpfung von Abbildungen eine Gruppe!

Wir können ein Element aus S_n durch seine Wertetabelle eindeutig beschreiben:

$$\sigma \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

z.B.:

$$\sigma : \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir nennen die Elemente von S_n auch Permutationen.

Satz 2.1:

Die S_n enthält genau $\boxed{n!}$ Elemente!

Beweis:

$$\sigma \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix} \leftarrow \text{alle Zahlen von } 1-n \text{ tauchen genau } 1\text{x auf!}$$

$\sigma(1)$: n Möglichkeiten, $\sigma(2)$: $n-1$ Möglichkeiten, $\sigma(3)$: $n-3$, $\sigma(4)$: $n-4$, …, $\sigma(n-1)$: 2, $\sigma(n)$: 1

Insgesamt: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten $\square$

Bsp. 2.3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Also: S_3 ist nicht kommutativ!

Allgemein: S_n - - - - - - - - - - - - für $n \geq 3$.

Bem. 2.4:

Wie berechne ich ein Inverses?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

tausche die Zeilen aus!

$$\Rightarrow \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Bsp: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Kontrolle:

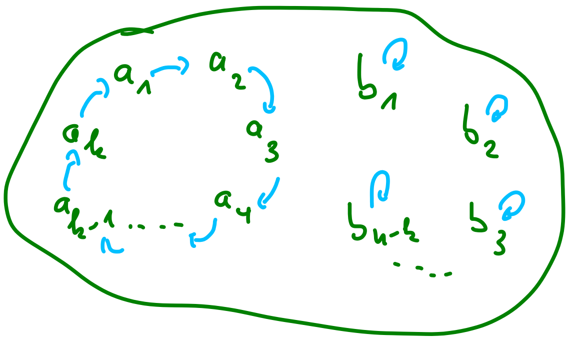
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

Def. 2.5:

(a) Sei $\{1, \dots, n\} = \{a_1, \dots, a_k\} \cup \{b_1, \dots, b_{n-k}\}$.

Eine Permutation der folgenden Form heißt ein

k-Zykel:
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-k} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_k & a_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-k} \end{pmatrix}$$



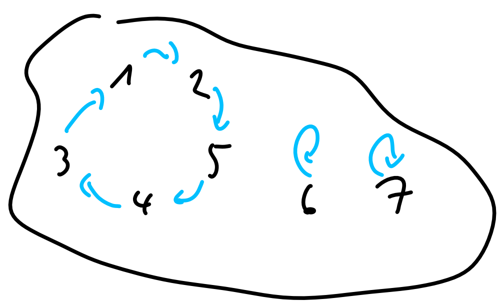
$$=: (a_1 \; a_2 \; a_3 \; \cdots \; a_k)$$

(b) 2-Zykel heißen auch **Transpositionen**.

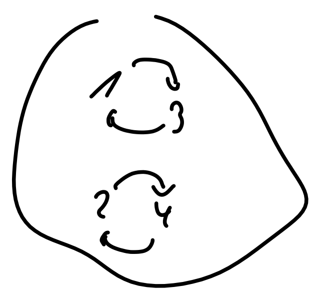
Bsp. 2.6:

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1 \; 2 \; 5 \; 4 \; 3)$$

ist ein 5-Zykel



(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
ist kein Zykel



Bem. 2.7:

Was passiert, wenn man 2 disjunkte Zykel mit einander multipliziert?

d.h. keine Zahl kommt in beiden Zykeln vor!

z.B.: $(1\ 2\ 3) \circ (4\ 5\ 6) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right) = (4\ 5\ 6) \circ (1\ 2\ 3)$

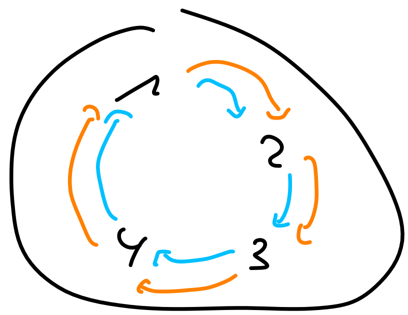
$$(1\ 3) \circ (2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Satz 2.8:

Jede Permutation kann als Produkt von disjunkten Zykeln geschrieben werden!

Uneindeutigkeiten bei Zykeln

① $(1\ 2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (2\ 3\ 4\ 1) = (3\ 4\ 1\ 2)$



② $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$

$(1\ 2\ 3) \quad \not\Rightarrow \quad (1\ 2\ 3)$

Bsp. 2.9:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 3 & 9 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5\ 3) \circ (4\ 6\ 9\ 8) \circ \cancel{(7)}$$

$$= (1\ 2\ 5\ 3) \circ (4\ 6\ 9\ 8)$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 6 & 3 & 9 & 7 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \overset{!}{=} (8\,9\,6\,4) \circ (3\,5\,2\,1)$$

Invertieren ≙ Zykel rückwärts aufschreiben!

$$(1\,2\,3\,5) \circ (2\,4\,3\,5) = (1\,2\,4\,5\,3)$$

Aufgaben:

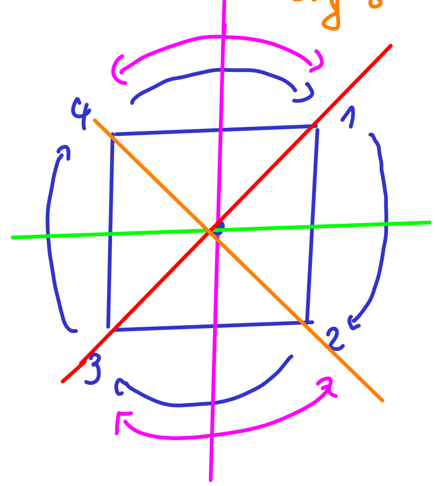
A 10|12| $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A \circ B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

	$\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$	A	$-A$	B	$-B$	AB	$-AB$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$	A	$-A$	B	$-B$	AB	$-AB$
$-\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$-A$	A	$-B$	B	$-AB$	AB
A	A	$-A$	$-\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	AB	$-AB$	$-B$	B
$-A$	$-A$	A	$\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$	$-AB$	AB	$-B$	B
B	B	$-B$	$-AB$	AB	$-\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	A	$-A$
$-B$	$-B$	B	AB	$-AB$	$\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$	$-A$	A
AB	AB	$-AB$	B	$-B$	$-A$	A	$-\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$
$-AB$	$-AB$	AB	$-B$	B	A	$-A$	$\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$

A 14: $\sigma = (1\,2\,3\,4)$ $\quad \tau = (1\,4) \circ (2\,3)$

D_8 = Diedergruppe der Ordnung 8

	id	σ	σ^2	σ^3	τ	$\tau\circ\sigma$	$\tau\circ\sigma^2$	$\tau\circ\sigma^3$
id	id	σ	σ^2	σ^3	τ	$\tau\circ\sigma$	$\tau\circ\sigma^2$	$\tau\circ\sigma^3$
σ	σ	σ^2	σ^3	id	$\tau\circ\sigma^3$	τ	$\tau\circ\sigma$	$\tau\circ\sigma^2$
σ^2	σ^2	σ^3	id	σ	$\tau\circ\sigma^2$	$\tau\circ\sigma^3$	τ	$\tau\circ\sigma$
σ^3	σ^3	id	σ	σ^2	$\tau\circ\sigma$	$\tau\circ\sigma^2$	$\tau\circ\sigma^3$	τ
τ	τ	$\tau\circ\sigma$	$\tau\circ\sigma^2$	$\tau\circ\sigma^3$	id	σ	σ^2	σ^3
$\tau\circ\sigma$	$\tau\circ\sigma$	$\tau\circ\sigma^2$	$\tau\circ\sigma^3$	τ	σ^3	id	σ	σ^2
$\tau\circ\sigma^2$	$\tau\circ\sigma^2$	$\tau\circ\sigma^3$	τ	$\tau\circ\sigma$	σ^2	σ^3	id	σ
$\tau\circ\sigma^3$	$\tau\circ\sigma^3$	τ	$\tau\circ\sigma$	$\tau\circ\sigma^2$	σ	σ^2	σ^3	id



§ 3 Untergruppen und Gruppenhomomorphismen

Def. 3.1:

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\mathcal{U} \subseteq G$ eine nicht-leere Teilmenge von G.

Dann heißt $\mathcal{U}$ eine Untergruppe von G,

wenn: ① $g \cdot h \in \mathcal{U}$ für alle $g, h \in \mathcal{U}$.

② $g^{-1} \in \mathcal{U}$ für alle $g \in \mathcal{U}$.

Beachte: Damit ist $(\mathcal{U}, \cdot)$ selbst eine Gruppe!

Bsp. 3.2:

ⓐ $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{C})$

$Q_8 := \mathcal{U} = \{ \mathbb{1}, -\mathbb{1}, A, -A, B, -B, AB, -AB \} \subseteq Gl_2(\mathbb{C})$

Aus der Gruppentafel in A 12 folgt, dass $\mathcal{U}$ eine Untergruppe von $Gl_2(\mathbb{C})$ ist

Q_8 heißt die Quaternionengruppe der Ordnung 8.

ⓑ $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4), \quad \tau = (1\ 4) \circ (2\ 3) \in S_4$

$D_8 := \mathcal{U} = \{ id, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau \circ \sigma, \tau \circ \sigma^2, \tau \circ \sigma^3, \tau \} \subseteq S_4$

ist eine Untergruppe der S_4 (siehe A 14)

D_8 heißt die Diedergruppe der Ordnung 8.

Hilfssatz 3.2:

Wenn U_i eine Untergruppe von G ist für alle $i \in I$, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ eine Untergruppe von G.

Beweis:

- U_i eine Untergruppe von G $\Rightarrow$ $e \in U_i$
  $\Rightarrow$ $e \in \bigcap_{i \in I} U_i$ $\Rightarrow$ $\bigcap_{i \in I} U_i$ ist eine nicht-leere TM von G
- Seien $g, h \in \bigcap_{i \in I} U_i$ $\Rightarrow$ $g, h \in U_i$ für alle $i \in I$
  $\Rightarrow$ $g \cdot h, g^{-1} \in U_i$, weil U_i Untergruppe von G ist für alle $i \in I$
  $\Rightarrow$ $g \cdot h, g^{-1} \in \bigcap_{i \in I} U_i$.

Also: $\bigcap_{i \in I} U_i$ ist eine Untergruppe von G. $\boxed{\checkmark}$

Definition 3.4:

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $A \subseteq G$.

Dann heißt $\langle A \rangle := \bigcap_{\substack{U \text{ ist Untergruppe} \\ \text{von } G \text{ mit } A \subseteq U}} U$ das Erzeugnis von A.

Wegen 3.3 gilt: $\langle A \rangle$ ist <u>die</u> kleinste Untergruppe von G, die A enthält!

Satz 3.5: Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $A \subseteq G$.

Dann: $\langle A \rangle \overset{!}{=} \{ g_1^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot g_n^{\pm 1} \mid g_1, \ldots, g_n \in A,\ n \geq 1 \} \cup \{e\}$

Bsp. 3.6:

(a) $G = GL_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A} = \{A, B\}$

$\Rightarrow \quad \langle \mathcal{A} \rangle = \langle A, B \rangle = Q_8$

(b) $G = S_4$, $A = \{ \sigma, \tau \}$ mit $\sigma = (1234)$, $\tau = (14)(23)$

$\Rightarrow \quad \langle A \rangle = \langle \sigma, \tau \rangle = D_8$

(c) $S_3 = \{ id, (12), (13), (23), (123), (132) \}$

Finde alle Untergruppen der S_3!

- alle Untergruppen, die von 1 Element erzeugt werden:

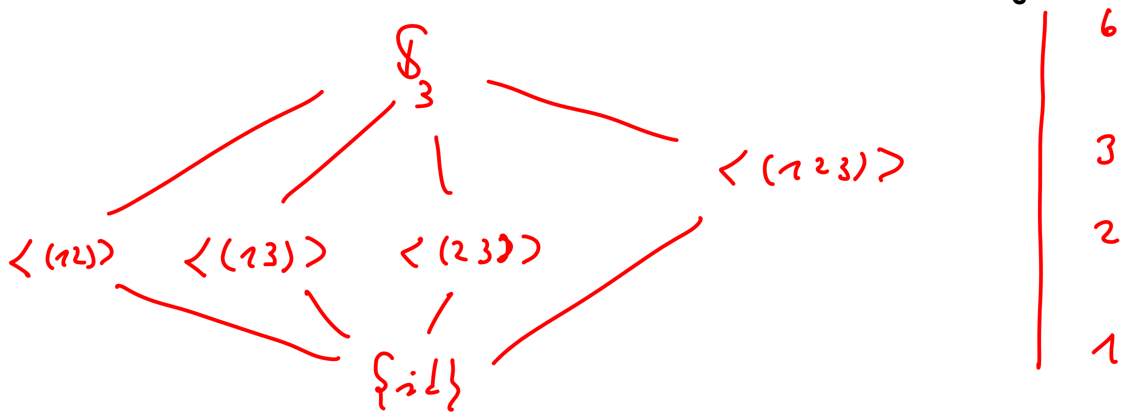
  - $\langle id \rangle = \{ id \}$
  - $\langle (12) \rangle = \{ id, (12) \}$
  - $\langle (13) \rangle = \{ id, (13) \}$
  - $\langle (23) \rangle = \{ id, (23) \}$
  - $\langle \underset{\sigma}{\underset{\shortparallel}{(123)}} \rangle = \{ \sigma^n \mid n \in \mathbb{Z} \} = \{ id, (123), (132) \}$
  - $\langle (132) \rangle = \{ id, (123), (132) \}$

- Untergruppen, die von 2 Elementen erzeugt werden?
  - $\langle (12), (13) \rangle = \{ id, (12), (13), (132), (23), (123) \} = S_3$

    $(12)\circ(13) = (1\,3\,2)$

    $(12)\circ(13)\circ(12) = (132)\circ(12) = (1)(23)$

    $(12)\circ(13)\circ(12)\circ(13) = (23)\circ(13) = (123)$
  - $\langle (12), (23) \rangle = S_3$, analog
  - $\langle (13), (23) \rangle = S_3$, "
  - $\langle (12), (123) \rangle = S_3$
  - $\langle (13), (123) \rangle = S_3$
  - $\langle (23), (123) \rangle = S_3$
  - $\langle (12), (132) \rangle = S_3$
  - $\langle (13), (132) \rangle = S_3$
  - $\langle (23), (132) \rangle = S_3$
  - $\langle (123), (132) \rangle = \{ id, (123), (132) \}$
- Damit auch: $\langle \underset{\neq id}{\sigma}, \underset{\neq id}{\tau}, \underset{\neq id}{\pi} \rangle = S_3$
- Wir haben in der S_3 das folgende Untergruppendiagramm:



Definition 3.7:

Seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen.

Dann heißt eine Abbildung $\alpha : G \to H$

ein Gruppenhomomorphismus, wenn:

$$\alpha(g \cdot h) = \alpha(g) * \alpha(h) \quad \text{für alle } g, h \in G.$$

Man sagt auch, daß α strukturerhaltend ist.

Bsp. 3.8:

(a) $(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$, $(H, *) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

$\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : z \mapsto e^z$

Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ $\alpha(x + y) \overset{?}{=} \alpha(x) \cdot \alpha(y)$

$$\underbrace{e^{x+y}}_{=\alpha(x+y)} \underset{\text{Potenzgesetze}}{=} \underbrace{e^x \cdot e^y}_{=\alpha(x)\cdot\alpha(y)}$$

Also: α ist ein Gruppenhomomorphismus!

(b) $(G, \cdot) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(H, *) = (Gl_2(\mathbb{R}), \circ)$

$\alpha : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to Gl_2(\mathbb{R})$ mit $\alpha(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\alpha(x \cdot y) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$

$\alpha(x) \circ \alpha(y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ α ist ein Gruppenhomomorphismus!

Aufgaben:

A 15: $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$Q_8 = \langle A, B \rangle \leq Gl_2(\mathbb{C})$$

$$\| $$

$$\bigcap \mathcal{U} \quad = \{ A^{n_1} \cdot B^{m_1} \cdot A^{n_2} \cdot B^{n_2} \cdots A^{n_k} \cdot B^{n_k} \mid n_i, m_i \in \mathbb{Z} \}$$

$\mathcal{U}$ Untergruppe von $Gl_2(\mathbb{C})$ mit $A, B \in \mathcal{U}$

$$\|$$

$$A, B \in \{ A^k \cdot B^l \mid k = 0, 1, 2, 3, \ l = 0, 1 \}$$

Beacht: $\boxed{A \circ B^3 = B \circ A}$

$$A \circ \boxed{B \circ A} = A \circ \boxed{A \circ B^3} = A^2 \circ B^3$$

Beacht: $g \in G \Rightarrow \langle g \rangle = \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$

$$Q_8 = \{ \mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2, A, -A, B, -B, AB, -AB \}$$

Bestimme die Untergruppen von Q_8:

(1) Untergruppen, die von 1 Element erzeugt werden:

$\langle \mathbb{1}_2 \rangle = \{ \mathbb{1}_2 \}$

$\langle -\mathbb{1}_2 \rangle = \{ \mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2 \}$

$\langle -A\rangle = \langle A\rangle = \{A^0, A^1, A^2, A^3\} = \{\mathbb{1}_2, A, -\mathbb{1}_2, -A\}$.

$\langle -B\rangle = \langle B\rangle = \{B^0, B^1, B^2, B^3\} = \{\mathbb{1}_2, B, -\mathbb{1}_2, -B\}$

$\langle -AB\rangle = \langle AB\rangle = \{(AB)^0, (AB)^1, (AB)^2, (AB)^3\} = \{\mathbb{1}_2, AB, -\mathbb{1}_2, -AB\}$

② Untergruppen, die von 2 Elementen erzeugt werden

$\langle A, B\rangle = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2, A, -A, B, -B, AB, AB^3\} = Q_8$, $\quad AB^3 = -AB$

$\langle A, B\rangle = \langle A, -B\rangle = \langle -A, B\rangle = \langle -A, -B\rangle$

$\langle A, B\rangle = \langle A, AB\rangle = \langle A, -AB\rangle = \langle -A, AB\rangle = \langle -A, -AB\rangle$

$\langle A, B\rangle = \langle B, AB\rangle = \langle -B, -AB\rangle = \langle B, -AB\rangle = \langle -B, AB\rangle$

Untergruppendiagramm

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & Q_8 = \langle A, B\rangle \arrow[dl, dash, "\subseteq"'] \arrow[d, dash, "\cup\!\!\mid"] \arrow[dr, dash, "\cup\!\!\mid"] & & 8 \\
\langle A\rangle \arrow[dr, dash, "\cup\!\!\mid"'] & \langle B\rangle \arrow[d, dash, "\cup\!\!\mid"] & \langle A\cdot B\rangle \arrow[dl, dash, "\subseteq"] & 4 \\
 & \langle -\mathbb{1}_2\rangle \arrow[d, dash, "\cup\!\!\mid"] & & 2 \\
 & \{\mathbb{1}_2\} & & 1
\end{tikzcd}$$

Beispiel: $\varphi_{120°}$ = Drehung um $120°$

$\Rightarrow G = \{\varphi_0, \varphi_{120°}, \varphi_{240°}\} \rightsquigarrow$ Untergruppendiagramm:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, dash] \\
\{\varphi_0\}
\end{tikzcd}$$

A2: $\mathbb{D}_4 = \langle \underset{d}{(1\,2\,3\,4)},\ \underset{\tau}{(1\,4)(2\,3)} \rangle$

$= \{ id, d, d^2, d^3, \tau, \tau\circ d, \tau\circ d^2, \tau\circ d^3 \}$

Untergruppen, die von 1 Element erzeugt werden

$\langle id \rangle = \{ id \}$

$\langle d^3 \rangle = \langle d \rangle = \{ d^0, d^1, d^2, \overset{d^{-1}}{d^3} \} = \{ id, d, d^2, d^3 \}$

$\langle d^2 \rangle = \{ id, d^2 \}$

$\langle \tau \rangle = \{ id, \tau \}$

$\langle \tau\circ d \rangle = \{ id, \tau\circ d \}$

$\langle \tau\circ d^2 \rangle = \{ id, \tau\circ d^2 \}$

$\langle \tau\circ d^3 \rangle = \{ id, \tau\circ d^3 \}$

Untergruppen, die von 2 Elementen erzeugt werden

$\langle d, \tau \rangle = \mathbb{D}_8$

$\langle d^3, \tau \rangle = \langle d, \tau\circ d \rangle = \langle d^{(3)}, \tau\circ d^3 \rangle = \langle d^{(3)}, \tau\circ d^2 \rangle$

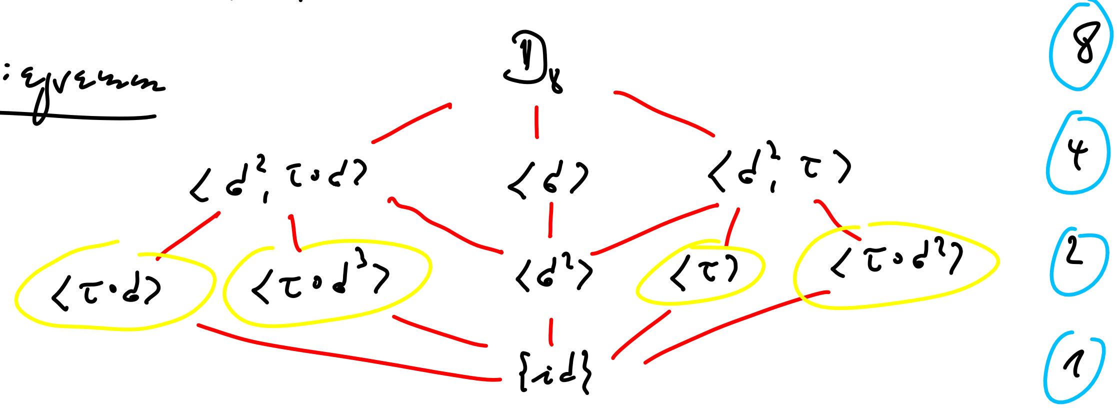
$\Uparrow$

$\tau = (\tau\circ d)\circ d^3$

$\langle d^2, \tau \rangle = \{ id, d^2, \tau, \tau\circ d^2 \}$

$\langle d^2, \tau\circ d \rangle = \{ id, d^2, \tau\circ d, \tau\circ d^3 \}$

Untergruppendiagramm



Def. 3.10: Zwei Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ heißen isomorph, wenn es einen bijektiven Gruppenhomom.

$\alpha: G \to H$ gibt!

Bemkg: dann ist auch $\alpha^{-1}: H \to G$ ein Gruppenhomom.

Denn: seien $h, h' \in H$.

Zu zeigen: $\alpha^{-1}(h * h') = \alpha^{-1}(h) \cdot \alpha^{-1}(h')$

Weil α bijektiv ist, gibt es $g, g' \in G$ mit

$h = \alpha(g)$ und $h' = \alpha(g')$.

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$g = \alpha^{-1}(h)$ $g' = \alpha^{-1}(h')$

$$\Rightarrow \alpha^{-1}(h * h') = \alpha^{-1}(\alpha(g) * \alpha(g'))$$
$$= \alpha^{-1}(\alpha(g \cdot g')) = g \cdot g' = \alpha^{-1}(h) \cdot \alpha^{-1}(h')$$

Bem. 3.11:

Wenn G und H isomorph sind, dann kann man sie als Gruppen nicht unterscheiden!

z.B: $\alpha: G \to H$ bij. Gruppenhomom.

und $U \subseteq G$

Dann: U ist Untergruppe von G

$\Leftrightarrow$ $\alpha(U)$ ist Untergruppe von H

Beispiel 3.12:

$$G = \langle (1234) \rangle = \{ id, (1234), (13)(24), (1432) \}$$

$$H = \langle \varphi_{90} \rangle = \{ \varphi_0, \varphi_{90}, \varphi_{180}, \varphi_{270} \}$$

$$\alpha : G \longrightarrow H : \quad id \mapsto \varphi_0, \quad (1234) \mapsto \varphi_{90}, \quad (13)(24) \mapsto \varphi_{180}, \quad (1432) \mapsto \varphi_{270}$$

Zeige: α ist ein Gruppenhomomorphismus & bijektiv!

Untergruppendiagramme:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & H \arrow[d, dash] \\
\{id, (13)(24)\} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & \{\varphi_0, \varphi_{180}\} \arrow[d, dash] \\
\{id\} \arrow[r, leftrightarrow] & \{\varphi_0\}
\end{tikzcd}$$

Frage 3.13: Sind Q_8 und D_8 isomorph?

Wie viele bijektive Abbildungen von Q_8 nach D_8 gibt es?

x	$\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$	A	$-A$	B	$-B$	AB	$-AB$
$\alpha(x)$								

8 Möglichkeiten $\cdot$ 7 $\cdot$ 6 $\cdot$ 5 $\cdot$ 4 $\cdot$ 3 $\cdot$ 2 $\cdot$ 1

Also: $8! = 40.320$ Möglichkeiten

Beachte: D_8 hat 10 Untergruppen, Q_8 hat nur 6

$\Longrightarrow$ D_8 und Q_8 können nicht isomorph sein!

<u>Aufgaben:</u>

<u>A 17:</u> (1) $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(x,y) = (x-y, y-x)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \end{pmatrix} = \alpha(x,y)$$

$$\Rightarrow \alpha\big((x,y)+(u,v)\big) = A \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)$$

$$= A \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \alpha(x,y) + \alpha(u,v)$$

(2) $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\beta(x,y) = (x+xy, 2x)$

$$\beta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \not\!\!\!\!\times$$

$\Rightarrow$ β ist kein G.H.

(c) $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(x,y) = (x-3y, 2x)$

$$\gamma(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma \text{ ist G.H.}$$

<u>A 18:</u>

<u>Beh:</u> $\alpha : G \to G$ mit $\alpha(g) = g^2$ ist G.H.

$\Leftrightarrow$ G abelsch

Satz von Lagrange 3.14:

Sei G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G.

Dann: $|U|$ teilt $|G|$

$|U|$ = Anzahl der Elemente in U

$|G|$ = Anzahl der Elemente in G

Folgerung 3.15:

Sei $G = \{\varphi_0, \varphi_{72}, \varphi_{144}, \varphi_{216}, \varphi_{288}\}$

$\overset{\text{Lagrange}}{\Longrightarrow}$ $\{\varphi_0\}$ und G sind die einzigen Untergruppen!

$\boxed{\text{fs}}$