Mathematisches Institut | Sommersemester 2009, Blatt 1
Thomas Markwig | Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Die Aufgaben dieses ersten Aufgabenblattes brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Schaut Euch die Aufgaben vor der ersten Übung am Freitag, den 24.4., an. Sie sollen während der Übung besprochen werden. Die meisten Begriffe werden erst in der zweiten Vorlesung eingeführt!

Aufgabe 1: Für einen Ring R und eine natürliche Zahl $d \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$R[x_1,\ldots,x_n]_d = \left\{ \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n=d} a_\alpha \cdot x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \;\middle|\; a_\alpha \in R \right\}.$$

Die Elemente von $R[x_1,\ldots,x_n]_d$ heißen *homogen vom Grad* d.
Unsere Definition der Polynome impliziert unmittelbar, daß es für jedes Polynom $0 \neq f \in R[x_1,\ldots,x_n]$ vom Grad d eine eindeutige Zerlegung $f = f_0+\ldots+f_d$ in homogene Polynome $f_i \in R[x_1,\ldots,x_n]_i$ gibt. Die f_i heißen die *homogenen Summanden* von f.

a. Gib die Zerlegung von

$$f = x_1^3 + 4x_1x_2 - 5x_2^4 + x_1x_2x_3 - 2x_3^2 + x_1 - 4x_2 + 5 \in \mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]$$

in homogene Summanden an.

b. Ein Ideal $I \trianglelefteq R[x_1,\ldots,x_n]$ heißt *homogen*, falls aus $f \in I$ folgt, daß die homogenen Summanden von f in I liegen.

Zeige, daß I genau dann homogen ist, wenn es homogene Polynome gibt, die I erzeugen.

c. Ist $I = \langle x^2 - 2y^4, 3x^2 + y^4 \rangle \lhd \mathbb{Q}[x,y]$ homogen?

d. Ist $I = \langle x^2 - 2y^4, 3x^2 + y^4 \rangle \lhd \mathbb{Z}[x,y]$ homogen?

Aufgabe 2: Zeige mittels Induktion nach n: wenn R ein Integritätsbereich ist, dann ist auch $R[x_1,\ldots,x_n]$ ein Integritätsbereich.

Aufgabe 3: Es sei R ein Ring und $f, g \in R[x_1,\ldots,x_n]$ seien zwei Polynome. Beweise die folgenden Gradformeln:

a. $\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$,

b. $\deg(f\cdot g) \leq \deg(f) + \deg(g)$,

c. $\deg(f\cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$, falls R ein Integritätsbereich ist.